28. kolovoza 2006.

Riemann za neznalice (68)

Pripadnikov vodič u Svemir

Bruce Director

Iako svi ljudi imaju sreću sprovesti vječnost unutar svemira, mnogi spiskaju svoj smrtni dio u obmani da su negdje drugdje. Ti samopretpostavljeni "nepripadnici" poprimaju opsesivno vjerovanje u svijet fantastike čiju prirodu određuju aksiomatske *a priori* pretpostavke obmanutog odabiranja i uporna tvrdnja da se svaki eksperimentalni dokaz koji proturiječi tim aksiomima mora odbaciti, ili ako ga se, uz negodovanje, prihvati onda se pretpostavlja da on dolazi "izvan" njihova svijeta. Tipičan primjer takvog vjerovanja su pojmovi eulidske geometrije, empirizam, pozitivizam, egzistencijalizam, ili ta najpogubnija patologija koja potresa našu kulturu: bebi-bumerizam.

Budući je neizbježno da će svi zaraženi tom umnom bolesti doživjeti prigode (barem jedna je zajamčena, no mnoge vrlo vjerojatne) gdje će suočiti lažnosti svog vjerovanja, odstranjivanje njihovih zabluda pruža kliničke dokaze značajne prvenstveno psihopatolozima. Iako je proučavanje takvih patologija veoma bitno u utvrđivanju bolesti, liječenje i spriječavanje zahtijevaju pozitivnu koncepciju zdravlja. Stoga stalni napredak ljudskih prilika zahtijeva radosno istraživanje stvarnog svijeta, prebivališta za koje su ljudi stvoreni. Kao što povijest sve veće dominacije ljudskog roda u svemiru i nad njim pokazuje, čovjek pokazuje upravo prirodnu sklonost djelovanja u tom pravcu. Na svu sreću, kao što su Platon, Kuza, Leibniz i Kepler isticali svemir je stvoren s tom svrhom jer spoznaja je sve-prožimajuće i djelotvorno načelo *u* svemiru. Što više, čitav svemir djeluje u svakom infinitezimalnom dijelu, i ono je dostupno ljudskom umu da ga raspozna i djeluje na njega.

Najnapredniji pristup takvom istraživanju svemira "iznutra" postavio je Riemann u svojoj poznatoj docentskoj dizertaciji iz 1854. U svom pristupu koji je bio toliko revolucionaran koliko i drevan, Riemann je inzistirao na povratak *anti*-euklidskom zdravom razumu, tražeći da znanost odbaci prihvat aksiomatskih sustava i nastavi samo na osnovi hipoteza nastalih iz istraživanja fizičkih zakonitosti. Problem s kojim se Riemann suočio bio je to, što su kroz više od dvije tisuće godina znanstvenici pali pod indoktrinaciju prihvaćanja pseudo-sustava (kao što je Euklidova geometrija) kao temelja koji je preduvjet na kojem se znanost mora izgraditi ili kao prihvaćeni no pretpostavljeno lažni oblik izražaja istinskog otkrića, ili kao u slučaju aristotelizma, aktualni oblik ljudskog znanja. Riemann je raspoznao, kao i njegov pokrovitelj u tom projektu, C.F. Gauss i Gaussov pokrovitelj A.G. Kästner da su aristotelovske i euklidske vrste dogmi, ili kao način izražavanja ili kao stvarno iako lažno istinsko uvjerenje, prepreke koje utamniče um unutar lažnog svijeta, i ostave ga sposobnim samo nemoćno zuriti u sliku za koju žrtva vjeruje da je vanjski stvarni svijet.

Kao posljedica toga, da bi znanost napredovala tu se različitost mora razbiti. ***Nema*** vanjskog (svijeta). *Postoji jedan, samoomeđeni svemir, čiji smo postupni razvoj sa odlikom protuentropijske sklonosti prema višim stanjima ustroja i postojanja sposobni* *spoznati iznutra pomoću spoznajnih moći utjelovljenih u ljudskom umu. Najprikladniji oblik izražavanja te fizičke stvarnosti se za moderni znanost zasniva na koncepciji* ***Riemannovog tenzora***[1].

Prigodom svoje docentske dizertacije Riemann je razložio metodu koju znanost pripadnika (Svemira) mora slijediti. Radeći tako dao je glas stvarnom obliku otkrića na kojem počiva svaki napredak u znanosti, od drevnih otkrića u vezi s egipatsko-pitagorejskom znanosti ***sferne geometrije***, do Gaussovih tada nedavnih dostignuća u astronomiji, geodeziji, geomagnetizmu, elektrodinamici i epistemologiji. No on je otišao dalje, uopćivši tu metodu do razine nikad prije dosegnute, čije potpuno dublje značenje tek sada izlazi na svijetlo dana LaRoucheevim otkrićima na području znanosti fizičke ekonomije i razlaganju tih ideja kroz tekući istraživački projekt ekonomskih animacija koje pod LaRoucheevim vlastitim nazorom razvijaju mladi mislioci LaRoucheevog pokreta mladih (LYM).

No reakcija teško umire. Čim se jeka Riemannovih riječi izgubila, njegova je metoda pala pod razne napade. Najprije je taj napad uzeo oblik grobne tišine. Nakon Riemannove prerane smrti, napad je uzeo rafiniraniji oblik. Dok su njegovi učenici i suradnici nastavljali animirati njegove ideje, njegovi neprijatelji su pokušavali zagušiti njegov program pod sustavom matematičkog formalizma, a tipičan primjer je prezentacija u traktatu Luthera Pfahlera Eisenharta 1926. godine, ***Riemannova geometrija***[2]. Problem takve obrade kao Eisenhartova nije uporaba matematičkih formula kao takovih (jer je i sam Riemann koristio stanovite formalne jednadžbe), već zamijena formalnih jednadžbi za Riemannove aktualne ideje. Radeći tako, Riemannovi su neprijatelji uspjeli, barem djelomično, nametnuti novi oblik euklidske dogme, pod krinkom neo-euklidskog formalizma, zlonamjerno krivo nazvanog „Riemannova geometrija". Budući je učinak ove sofisterije doveo sad znanost, a u širem smislu i, društvo u cjelini, do točke sloma, nužno je oživjeti Riemannov aktualni pristup. Prvi korak je postaviti Riemannovo otkriće unutar povijesnog procesa u kojem se još uvijek odvija.

Od Brunelleschija do Keplera

Na veliki užas babilonskog svećenstva iz kojeg su odskočile dogme Euklida i Aristotela, ljudski um može *raspoznati i djelovati* na osnovi univerzalnih fizičkih zakonitosti ***bez da*** se mora služiti matematičkim formalizmom. Sami Euklidovi ***Elementi*** su nevoljni no ipak odlučan svjedok te činjenice. Nijedno otkriće o kojem se govori u Euklidovim ***Elementima*** nije bilo, niti je moglo biti otkriveno deduktivnom metodom kojom se Euklid koristio. Kao što svatko tko pokuša stvarno reproducirati ta otkrića za sebe mora ubrzo shvatiti, otkrića o kojima se govori mogu se reproducirati samo obrnutim redosljedom, počevši od fizičke konstrukcije pet pravilnih geometrijskih tijela kao posljedice sfernog djelovanja, zatim nastavljajući razvojem neizmjerivih veličina, proporcija i brojeva pa konačno do konstrukcije likova u ravnini. Što više, katastrofalna greška u Euklidovim ***Elementima*** usađena je u svojstvo koje je Aristotel smatrao njihovim najodrživijim atributom, a to je sama deduktivna metoda.

Ta greška, kao što su Kästner, Gauss i Riemann isticali, razotkriva se u ovisnosti ***Elemenata*** o pravovaljanosti postulata paralele—pretpostavka koja se ne može dokazati unutar deduktivnog sustava na koju se ***Elementi*** oslanjaju. Kao što je Gauss izjavio, bez postulata paralele, nema sličnih trokuta, a bez sličnih trokuta svi drugi teoremi euklidske geometrije padaju u vodu. No, kao što je Gauss isto naglasio, postulat paralele pretpostavlja nešto što nije nigdje izrečeno—da je fizički svemir beskonačno proširen, pravocrtno, ili kao što su to Gauss i Riemann izrekli, ravna ploha. [3]

Iako su se dostignuća grčke znanosti u pokoljenjima nakon Euklida (najzapažljivije, dostignuća Arhimeda, Eratostena i Aristarha) izvodila iz *protu*-euklidskog pristupa u sprezi s astrofizikom koju su Egipćani i Pitagorejci označili kao *sfernu geometriju* relativna prevlast tog zdravijeg oblika znanosti počela je blijediti umorstvom Arhimeda od rimskih vojnika po prilici 212. godine pr. Krista. Nastala relativna prevlast euklidske geometrije (uz popratno kulturno propadanje Rimskog carstva, koje je lord Shelburnov Edward Gibbon tako visoko cijenio), prekinula se Brunelleschijevim uspješnim završetkom slobodno stojeće, samo-podupirajuće kupole iznad crkve Santa Maria del Fiore u Firenci. Od tog vremena do danas, Brunelleschijev svod stoji kao prkosni podsjetnik da stvarni svemir nije ravna ploha, kao što su euklidejci naznačavali, nego je određen fizičkim zakonitostima, koje su kasnije Gauss i Riemann izrazili kao fizička zakrivljenost (što ćemo kasnije detaljnije razraditi).

Kao što je LaRouche istaknuo 1988., zgrozivši mnoge u to vrijeme, zakonitost koju je Brunelleschi raspoznao i uporabio u svojoj uspješnoj konstrukciji Svoda, bila je zakonitost najmanjeg hoda (djelovanja) koju izražava lančanica [krivulja lanca]—zakonitost koju je u potpunosti razradio Leibniz više od dvije stotine godina kasnije. Ipak, Brunelleschijevo dostignuće pokazuje da je ljudski um sposoban prepoznati i djelovati na, i prenositi znanje fizičkih zakonitosti bez da ih ikad svede na formalnu matematičku konstrukciju. Naknadno, kad je Leibniz pokazao da se fizička zakonitost na kojoj počiva lančanica može odrediti kao funkcija logaritmičkih funkcija, on je dao toj jednadžbi matematički oblik. Unatoč tome, matematički izraz Leibnizovog otkrića nije zakonitost. Ona je *strogo ironični* iskaz transcendentalne prirode zakonitosti lančanice—točan iskaz matematičke dvosmislenosti iz koje se zakonitost, koju je Leibniz otkrio, može ponovno reproducirati u umu znanstvenika. [4]

Univerzalnu zakonitost koju Brunelleschijevo dostiguće dokazuje, razradio je Nikola Kuzanski u hladu novo sagrađenog Svoda. Pišući između ostalog u svom djelu ***De docta ignorantia*** [O učenom neznanju] Kuza je tvrdio *na epistemološkoj osnovi* da svojstvo djelovanja u fizičkom svemiru nije konstantno, nego se uvijek mijenja nejednoliko. To je značilo, protivno aristotelovcima, fizičko djelovanje nije u skladu sa matematički podobnom—savršenom kružnicom. Radije, Kuza je pokazao da je nejednolikost fizičkog djelovanja svojstvo *samo-usavršavajućeg* svemira, što je savršeniji uvjet od statičke, nepromijenljive sterilnosti svijeta kojim upravljaju Aristotelove savršene kružnice. Štoviše, budući je ljudsko stvaralaštvo središnja odlika usavršivosti svemira, um je sposoban otkriti *unutar razvijajućeg svemira* temeljne zakonitosti koje njime upravljaju.

Kuzin rad ponovno je u znanost uveo zahtjev određivanja i mjerenja fizičke zakonitosti pomoću svojstva promjene kojom se izražava djelovanje te zakonitosti u fizičkom svijetu—svojstvo koje su Gauss i Riemann kasnije nazivali *zakrivljenost*. Prva i vjerojatno najdramatičnija primjena toga bilo je Keplerovo otkriće univerzalne gravitacije.

Potpunu ponovnu pedagošku obradu Keplerovog otkrića, čije se pojedinosti mogu naći u njegovom djelu ***Nova astronomija***, u ovom trenutku razrađuje tim znanstvenih istraživača LYMa [vidi http://wlym.com/~animations], no kratki sažetak važnih pojmova je nužan za ovu diskusiju.

Kepler je odbacio aristotelovski propis da se znanje fizičkog svijeta mora ograničiti na područje osjetilnih zapažanja te da se zakonitosti koje upravljaju fizičkim gibanjem moraju otpraviti u, za njih, područje koje se u konačnici, ne može spoznati, koje je nepromjenljivo i metafizičko. Za aristotelovske astronome, to je predstavljalo naročito zamarajući problem, jer se čitava planetarna gibanja protežu van polja vidljivosti promatrača pa su uzroci gibanja potpuno van astronomovog osjetnog i (za aristotelovce) intelektualnog dometa. Zbog toga, astronomi rimskog razdoblja nisu priznavali nikakvo istinito znanje planetarnog gibanja, pomirivši se s matematičkim opisima svojih nagađanja o tome kako bi ta gibanja mogla izgledati, kad bi ih bili u stanju izravno motriti.

Takvo viđenje savršeno se poklapalo s prevladavajućim feudalističkim mišljenjem, da je smrtni čovjek u najbolju ruku malo savršenija životinja čije su spoznajne moći van „aktualnog“ svemira, pa prema tome i beznačajne glede tog svemira za kojeg su aristotelovci pogrešno zamišljali kao da njime upravlja utvrđeni sklop vječno nepromjenljivih zakona. Kao takvim, smrtnim čovjekom, prema mišljenju aristotelovaca, moraju upravljati očito kaotički zakoni ponašanja životinja bez mogućnosti pribjegavanja univerzalnim, vječitim zakonitostima, za koje su tvrdili da se ne mijenjaju.[5] No kao otvoreni pristaša Kuzanskog, Kepler je shvatio da je takvo viđenje čovjeka i svemira pogrešno. Čovjek, svojom moći spoznaje sposoban je saznati zakonitosti upravljanja svemirom kao *zakonitosti promjene*, kao što su Heraklit i Kuza isticali. Zbog toga Kepler je razumio da su kretanja planeta i čovjekovo istraživanje toga dio *jedinstvenog toka samorazvijajućeg stvaranja*, koje obuhvaća razvoj života i ljudske spoznaje. Smrtni čovjek nije izvan svemira niti je svemir van nadležnosti smrtnog čovjeka. Radije, smrtni čovjek, posjedujući moć spoznaje, prekoračuje smrtnost, igrajući jedinstvenu i neodjeljivu ulogu u vječnom i neprekidnom razvoju svemira u cjelini.

Kao posljedicu toga, istaknuo je Kepler, najbolje stajalište za otkriće zakonitosti planetarnog gibanja nije izvan, nego unutar svemira:

> Jer kako Sunce u svojoj revoluciji oko svoje osi pokreće sve planete isijavanjem koje šalje iz sebe van, tako i um, kako nam filozofi kažu, razumijevajući sebe i sve što je u njemu, potiče uporabu razuma pa šireći i razvijajući svoju jednostavnost uzrokuje razumijevanje svih stvari. Gibanja planeta oko Sunca su toliko bliska a procesi razumijevanja u sprezi i povezani jedni s drugima pa ako Zemlja, naš dom, ne bi mjerila svoje godišnje kruženje [kružnicu] usred drugih kugli, zamjenjujući mjesto za mjesto, položaj za položaj, ljudsko razumno razmišljanje se ne bi nikad uhvatilo u koštac s absolutno istinskim razdaljinama planeta i drugih predmeta koji ovise o njima, i ne bi nikad ustanovilo astronomiju.[6]

On je odbacio kao takove matematičke modele planetarnog gibanja, koje su Ptolomej, Kopernik i Tycho Brahe pretpostavljali. Iako je svaki model bio radikalno različit, sva tri su pokušavali opisati eksperimentalno određeno nejednoliko gibanje planeta, podešavajući statističke podatke observacija u matematički određene savršene kružnice. Kepler je neumornim radom prikazao u početnom poglavlju svoje ***Nove astronomije*** da takvim statističkim metodama nije moguće ustanoviti istinu, jer su sva tri modela dala praktički iste statističke rezultate. Protagonisti Ptolomeja, Kopernika ili

Brahe ne bi mogli tome prigovoriti, jer su sva trojica prihvatili aristotelovsko uvjerenje da je matematički formalizam jedini sigurni oblik znanja.

Međutim za Keplera su hipoteze glede pravih fizičkih uzroka jedini oblik znanja. Prema tome on se uputio pokazati da postoji nepravilnost (anomalija) prirođena statističkim obrazloženjima Ptolomeja, Kopernika i Brahe, koja je odraz postojanja fizičke zakonitosti koju nijedan od tri sustava nije uzeo u obzir. Kao i postulat paralele u Euklidovim ***Elementima***, Keplerova nepravilnost se ne može otkriti metodom Ptolomeja, Kopernika ili Brahe, i nikakva manipulacija unutar tih matematičkih sustava ne može je eliminirati. No kad je se jednom utvrdi mora se odbaciti ili sustav ili usvojiti njegovo bezumlje.

Temeljna pretpostavka svih triju modela bila je Aristotelova tvrdnja da gibanje materijalnog tijela ne može prouzrokovati nematerijalna zakonitost, nego ga mora prouzrokovati nešto unutar samog tijela. Zbog toga aristotelovci su gledali na planetarnu putanju kao tvorevinu planeta. Budući da je očigledno nejednoliko gibanje planeta uzduž luka njegove putanje odstupalo od pretpostavljenog savršenog jednolikog kružnog gibanja, Ptolomej, Kopernik i Brahe su svi tražili neku točku (punctum aequant, 'ekvant') oko koje bi planet prolazio jednake lukove u svojoj putanji. Kepler je pokazao, iscrpno, da takva točka ne postoji. Bez obzira na svaku dosjetljivost pokušaja manipulacije statistikama, glede modela Ptolomeja, Kopernika i Brahe, odstupanje ostaje.

Kepler je zaključio da to odstupanje nije statistička aberacija. Bila je to načelna stvar. Za Keplera putanja planeta nije trag njegovog gibanja. Radije, putanju određuje *fizički uzrok* koji određuje gibanje planeta. Taj je uzrok, tvrdio je Kepler, fizička zakonitost (gravitacija) koja prožima svemir. Pod utjecajem te zakonitosti postoji sprega između Sunca i planeta pojedinačno (koja se odražava [njegovim pravilom] jednake površine = jednako vrijeme), i Sunca i svih planeta skupa (što se odražava u harmoničkim odnosima među najmanjim i najvećim brzinama kretanja planeta). Obzervacijske statistike su bile, za Keplera, jednostavno tragovi koje ta zakonitost ostavlja. Kad se jednom zakonitost pronašla, tragove se moglo pojasniti.

Stoga, za Keplera, nejednoliko gibanje planeta u svakom infinitezimalnom intervalu vode harmonička svojstva sunčevog sustava kao cjeline. Ta harmonička načela određuju putanju planeta kao, kako je to Leibniz kasnije nazvao, put najmanjeg hoda sunčevog sustava. Drugim riječima, planeti se ne gibaju u jednoj od neizmjerno mnogo mogućih putanja u inače praznom prostoru. Radije, planeti se kreću putevima najmanjeg hoda, jedinstveno određenim harmoničkim svojstvima sunčevog sustava. Sa stajališta planeta, naglašavao je Kepler, taj put je uvijek pravac (pravocrtna linija). „Pravocrtnost“, kao što je Gauss kasnije tvrdio, se uspostavlja fizičkim, a ne ***a priori*** matematičkim razmatranjima. Ljudski um prosuđuje ta fizička razmatranja kao svojstvo promjene fizičke zakonitosti. Tu promjenljivu odliku Gauss i Riemann će kasnije izraziti kao pojam *fizičke zakrivljenosti*.

Fizička zakrivljenost od Leibniza do Gaussa

Keplerovo revolucioniziranje fizičke astronomije zahtijevalo je potpunu promjenu u prevladavajućoj matematici, nešto sasvim drugo od ozračja u znanosti danas. Dok je Kepler pogurao fiziku naprijed i tražio stvaranje nove matematike u skladu s tim, današnji sustav sofističkih akademskih odbora procjene (i objavljivanja) znanstvenih radova tvrdi upravo suprotno, da se nijednom fizičkom otkriću ne smije dopustiti ulaz u hram, ako nije popraćeno izrazima već postojeće matematike.

Pokazavši da je fizičko djelovanje doista nejednoliko, Kepler se morao sučeliti s problemom kako mjeriti gibanje planeta kao funkciju promjenljivih djelovanja zakonitosti gravitacije. To je tražilo razvoj nove matematike koja bi bila u stanju izraziti položaj kao funkciju promjene umjesto naznačivanja promjene kao puku razliku položaja. Kepler je ukazao na smjer koji nova matematika mora uzeti, i zahtjevao da je budući matematičari razviju.

Precizirao je da se čitav sunčev sustav mora razmatrati kao jedinica djelovanja a gibanje planeta u svakom trenutku mora se, u skladu s tim, mjeriti kao funkcija harmoničkih odlika sunčevog sustava kao cjeline. Te harmoničke odlike, koje se odražavaju u ulozi pet platoničkih geometrijskih tijela i omjerima između najvećih i najmanjih brzina planeta koje odgovaraju muzičkim intervalima, određuju broj i položaj planetarnih putanja. Unutar svake putanje gibanje planeta se mjeri u odnosu na cijelu putanju. Stoga postoji uzajamno recipročni odnos između trenutnog djelovanja gravitacije na planet i ukupnog djelovanja, koje je Gauss kasnije nazvao gravitacijskim potencijalom sunčevog sustava kao cjeline.

Leibniz je uopćio tu Keplerovu koncepciju uvođenjem pojma infinitezimalnog kao izraza prožimajućeg, *no uvijeg promjenljivog*, učinka univerzalne zakonitosti u svakoj točki fizičkog prostorvremena. On je izrazio taj inverzni odnos između infinitezimalnog i univerzalnih izraza te zakonitosti kao diferencijalne i integralne oblike računa. Taj Leibnizov *infinitezimalni račun* jedini je pravi diferencijalni račun. Prijevare Newtona i Cauchyja su samo sirove sofisterije koje imaju za cilj izbaciti metafizičko značenje Leibnizove fizičke koncepcije infinitezimalnog. Dok formalizmi Newtona, Cauchyja i njihovog potomstva mogu bez infinitezimalnog biti privlačni čistim matematičarima, svakoga tko želi shvatiti bilo šta o fizičkom svemiru, vuči će ga prema sebi, svijesno ili ne, neka vrsta Leibnizove koncepcije. Relativna snaga, ili njen nedostatak, znanstvenika jednim se dijelom odražava u stupnju do kojeg je taj znanstvenik svjestan, posredno ili neposredno, superiornosti Leibnizove metode.

Leibnizov pristup diferencijalnom računu opisan je uglavnom u njegovim vlastitim radovima i radovima njegovog suradnika Johanna Bernoullija. Tu smo građu obradili ranije u prijašnjim nastavcima ove serije pedagoških uradaka. Zbog razloga koji imaju važnost za ovu pedagošku diskusiju, Leibnizov ćemo i Bernoullijev račun istražiti kroz primjere njegove primjene na lančanicu sa stajališta kasnijeg Gaussovog i Riemannovog razvoja.

Lančanica je odsudni primjer metafizičke istinitosti Leibnizovog računa. Svi prijašnji pokušaji, najznačajni od njih Galilejev, razjašnjenja oblika lančanice matematičkim razmatranjima doživjeli su neuspjeh. Samo primjenom Leibnizovog računa na fizička svojstva visećeg lanca Bernoulli i Leibniz uspjeli su otkriti metafizičku zakonitost na kojoj počiva lančanica. [7]

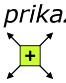
I Leibniz i Bernoulli su prepoznali da oblik kojeg zauzima viseći lanac jednolične debljine odražava fizički učinak primjene napetosti preko gravitacionog potencijala. Prema tome, odbacili su svaki pokušaj objašnjavanja lančanice pretpostavljajući da je to „krivulja“ u inače praznom i ravnom euklidskom prostoru. Radije, oni su bili mišljenja da oblik krivulje izražava nejednoliku promjenljivu interakciju sile teže i napetosti. To se može potvrditi pokusima koje je Bernoulli naveo u svom pisanju o integralnom računu, ili, radovima koje su predstavili članovi LYMa u svojim pedagoškim vježbama[8]. Svatko tko pravi te pokuse raspoznat će promjenu smjera lanca od točke do točke, kao fizički određen učinak promjenljivih odnosa sile teže i napetosti. Stoga zakrivljenost lanca nije proizvoljno odstupanje od euklidske pravocrtnosti. To je izraz eksperimentalno određenog fizičkog svojstva.

Važno je međutim istaknuti, da zakrivljenost u tom smislu nije matematički predmet, već matematički izraz fizički određenog svojstva iz kojeg se izvode metrički odnosi lančanice. Oni se izražavaju funkcijskim odnosom između duljine lanca unutar danog raspona i promjenjive zakrivljenosti unutar istog raspona. U slučaju lančanice taj se odnos matematički izražava Bernoullijevom diferencijalnom jednadžbom koja izražava duljinu lanca kao funkciju promjenljivog učinka gravitacije na napetost .[9]

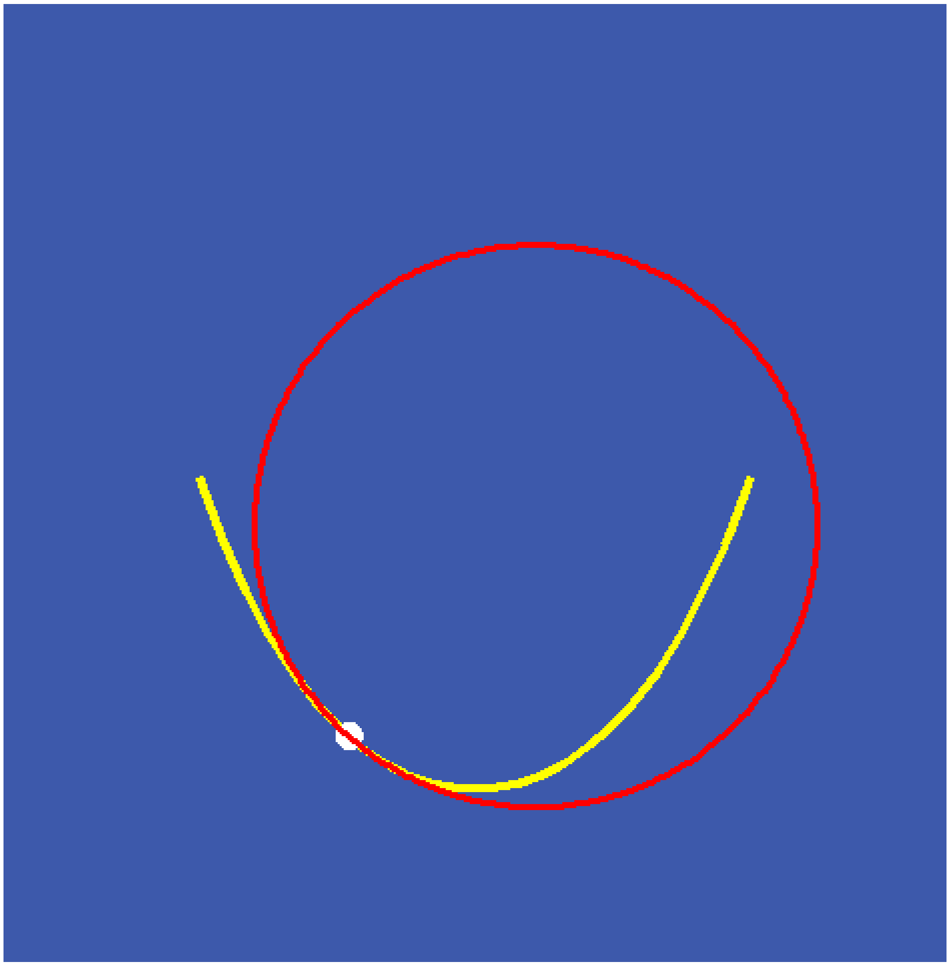
Kao i planetarna putanja, lančanica pokazuje čitavu zakrivljenost koju izražava cjelokupni oblik visećeg lanca[10]. Isto tako kao i planetarna putanja zakrivljenost se mijenja i različita je u svakom infinitezimalnom dijelu. Ta infinitezimalna zakrivljenost je izraz tangencijalnog djelovanja fizičke zakonitosti na fizički lanac kao da ona djeluje izvana na vidljivi svijet. Iako van vidljivog svijeta to nije izvan svemira. Zbog toga otkriće tog infinitezimalnog izraza predstavlja način kojim čovjek može otkriti unutar fizičkog procesa, zakonitosti koje njime upravljaju izvan vidljivog područja. Infinitezimalna zakrivljenost se može mjeriti, kao što je Leibniz predlagao, recipročnom vrijednosti polumjera priljubljujuće kružnice u toj točki (vidi Prikaz 1).

Tenzor_animacija/prikaz 001

NAPOMENA: Za prikazivanje animacije 'klikni' mišom na 'link' Tenzor-animacija'. Kad se prikaz otvori klikni mišom negdje na slici, pa bi se u desnom donjem uglu trebao (kod nekih prikaza) pojaviti mali kvadratić za povećavanje slike.



Klikni na taj kvadratić pa će animacija onda biti najbolja. Rad ove animacije provjeren je za Internet Explorer.



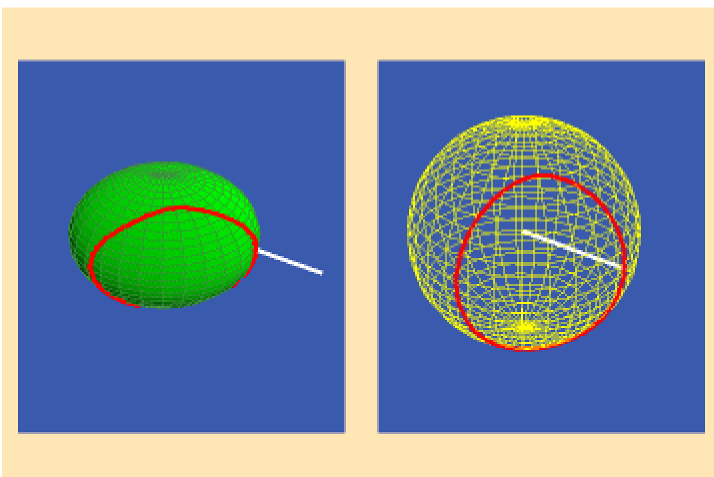
Ta zakrivljenost, međutim, može se isto tako mjeriti tako reći unutar lanca, eksperimentalno mjerenim promjenljivim učinkom interakcije sile teže i napetosti lanca, kao što to naznačuju Leibnizove i Bernoullijeve diferencijalne funkcije.

Međutim, dublja istraživanja fizičkog svemira traže sposobnost otkriti, iznutra, učinke mnogih zakonitosti koje djeluju zajedno na jedno te isto mjesto u fizičkom prostorvremenu. Taj pojam „svojstvene" zakrivljenosti postaje razvidniji kad ga shvatimo sa stajališta njegovog razvoja od strane Gaussa u njegovom slavnom traktatu o zakrivljenim plohama[11]. Gauss se duboko angažirao u fizička istraživanja u geodeziji, geomagnetizmu i astronomiji, kao na primjer u određivanju putanje Ceresa, svom određivanju oblika Zemlje i svojim određivanjem prirode zemljinog magnetskog polja. Kao Keplerovo određivanje zakonitosti planetarnog gibanja, sva takva istraživanja zahtjevaju određivanje fizičkih zakonitosti iznutra. Za Keplera to je značilo određivanje gibanja planeta s planeta (Zemlje) koji se isto tako kreće prema istim zakonitostima koje je Kepler nastojao otkriti. No Gauss je imao još i dodatni problem. Dok je Kepler uživao pogodnost velikog broja obzervacija na širokom polju na kojem je mogao raditi, Gauss je radio na osnovi malog broja relativno infinitezimalnih mjerenja. To je natjeralo Gaussa na razvoj proširenog oblika Leibnizovog diferencijalnog računa u kojem je istraživao odnos između globalnih fizičkih odlika i njihovog izražaja u infinitezimalno malom. Taj pristup je odtada postao poznat kao diferencijalna geometrija.

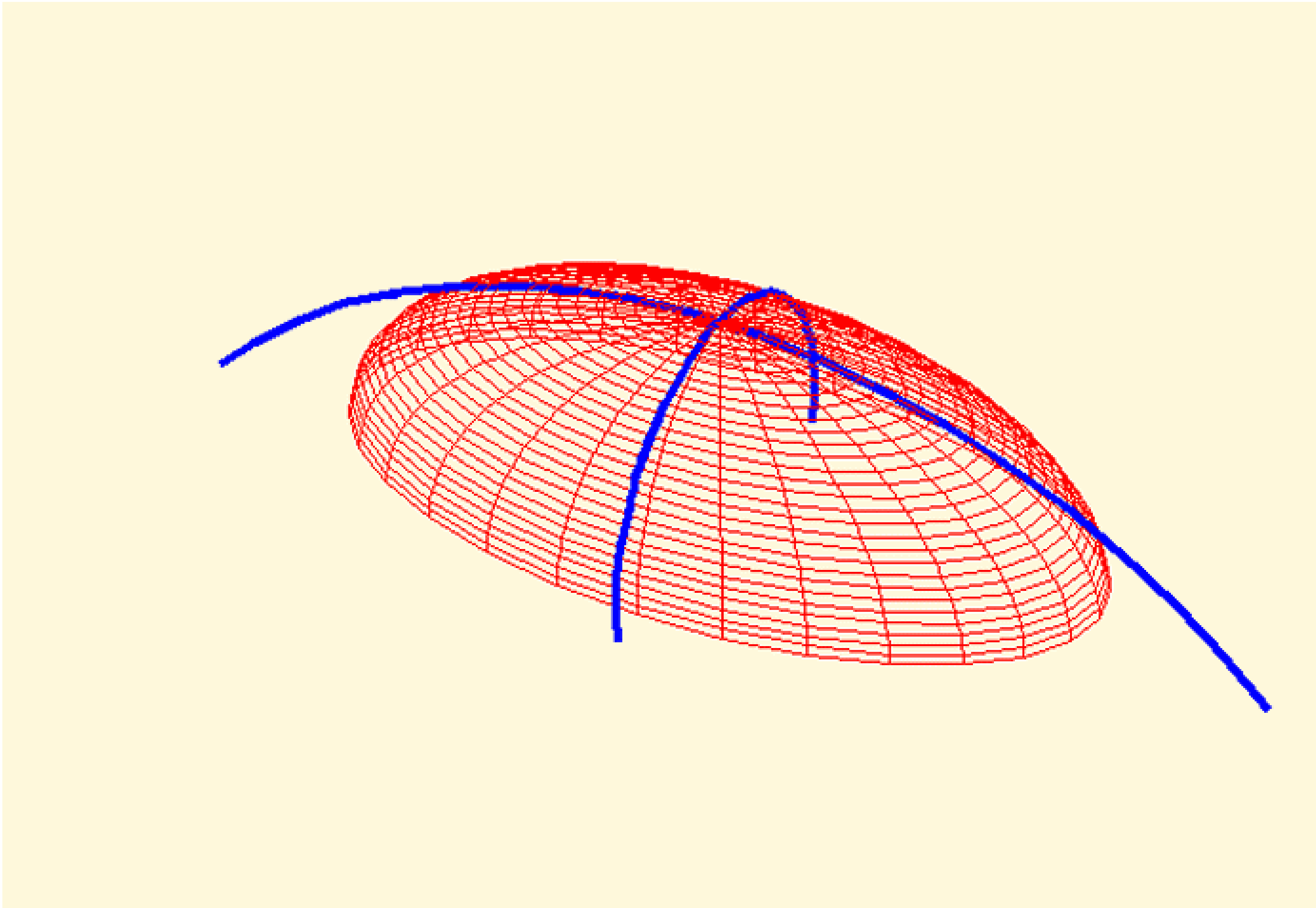
Takve fizički određene plohe, tvrdio je Gauss, ne smiju se smatrati kao zakrivljeni predmeti koji su inače ugrađeni (umotani) u ravni trodimenzionalni euklidski prostor, nego kao što je Riemann kasnije zvao, dvostruko prošireni mnogoznačnik. Ta koncepcija, iako nova za Gaussa u tom obliku, može se čuti u koncepciji koju je Kepler izgovorio u drugom poglavlju svog ***Mysterium Cosmographicum***. Upućujući na Kuzino isticanje epistemološke važnosti razlike između krivulje i ravne crte, Kepler razlikuje između kugle, koja je sfera ugrađena u trodimenzionalni prostor i sfere koju smatra samo plohom. Prva je, ističe Kepler, mješavina zakrivljenosti i ravne plohe dok je potonja čista zakrivljenost.

Dosljedno tom gledištu Keplera, Gauss je prognao pretpostavku ravne plohe euklidske geometrije u svom istraživanju zakrivljenih ploha, i smatrao je da su plohe određene isključivo svojom zakrivljenosti. Usvojivši metodu iz astronomije i geodezije, Gauss je mjerio zakrivljenost ploha promjenom smjera okomice na plohu i njenim preslikom s te plohe na kuglu. [12] (Vidi prikaz 2.).

Tenzor_animacija/prikaz 002



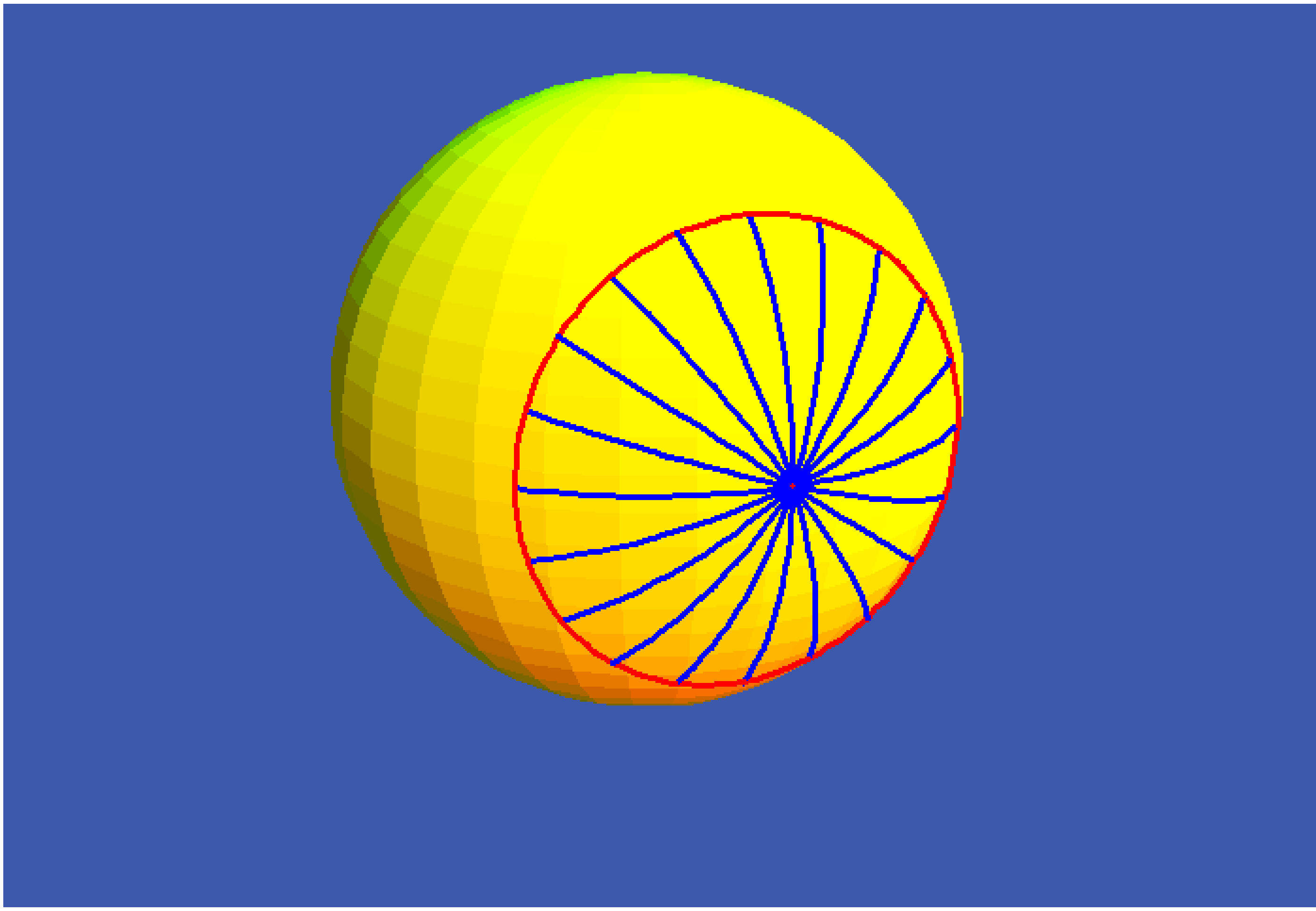
Površine rezultirajućih preslika (zvanih Gaussovi preslici) su veće kad su odgovarajuće površine plohe zakrivljenije, a manje kad su odgovarajuće površine plohe manje zakrivljene. Gauss je zvao ukupnu površinu sfernog preslika ukupnu, ili integral zakrivljenosti tog područja plohe. Međutim, unutar tog područja zakrivljenost može varirati u dosta širokim razmjerima od mjesta do mjesta. Stoga, Gauss je našao za potrebno razviti koncepciju lokalne, ili infinitezimalne mjere zakrivljenosti u svakoj točki unutar tog područja. To je on naznačio kao omjer površine svake infinitezimalno male površine plohe i odgovarajuće infinitezimalno male površine Gaussovog preslika. Pokazao je da se ta veličina isto tako može mjeriti recipročnom vrijednosti umnoška polumjera priljubljujućih kružnica na najmanje i najveće zakrivljenosti u toj točki. (Vidi prikaz 3.).



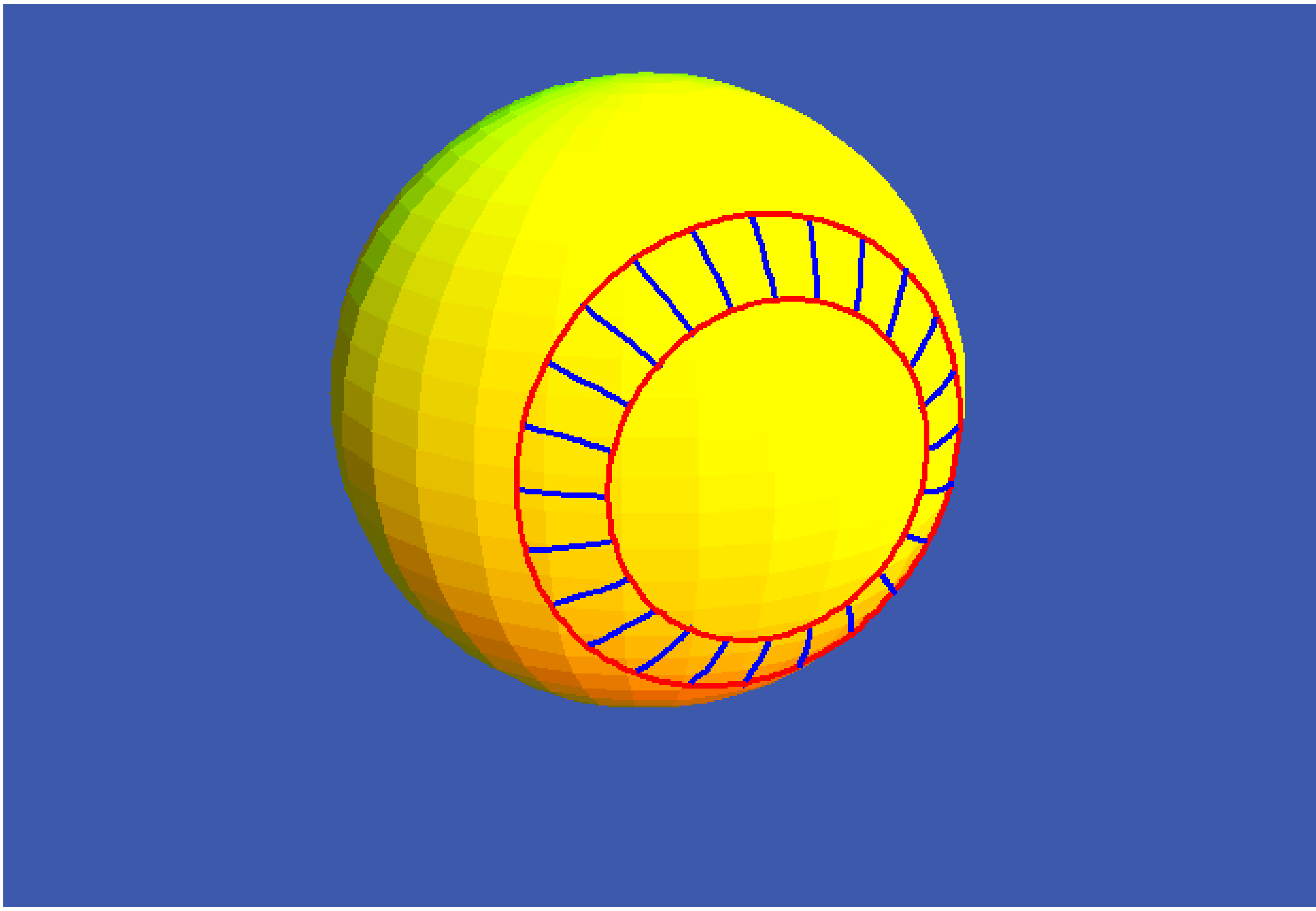
Iz tih dvaju mjerenja, integrala i lokalne zakrivljenosti, Gauss je mogao izmjeriti odlike plohe u velikom i promjenama odlika u malom.

Da bi se mjerila zakrivljenost plohe na taj način, potrebno je gledati na plohe izvana, kao da su ugrađene u viši dimenzionalni prostor[13]. Međutim, Gauss je kao i Kuza, Kepler i Leibniz shvatio da u pravoj znanosti čovjek mora biti u stanju mjeriti fizičku zakrivljenost iznutra, kao što je Gauss učinio u određivanju putanje Ceresa, oblika Zemlje, ili svojstva zemaljskog magnetskog polja. To je značilo moći odrediti kako se ploha mijenja u infinitezimalno malom iznutar same plohe. Da bi to postigao Gauss se oslanjao na primjenu Leibnizove zakonitosti najmanjeg hoda, koja se u slučaju ploha izražava ponašanjem najkraćih crta te površine, to jest geodezijske crte[14]. Svojstva tih geodezijskih crta, kao i kod lančanice ili planetarne putanje, određena su prirodom fizičkih zakonitosti iz kojih je nastala ta ploha. Prema tome njihovo ponašanje izražava te fizičke zakonitosti.

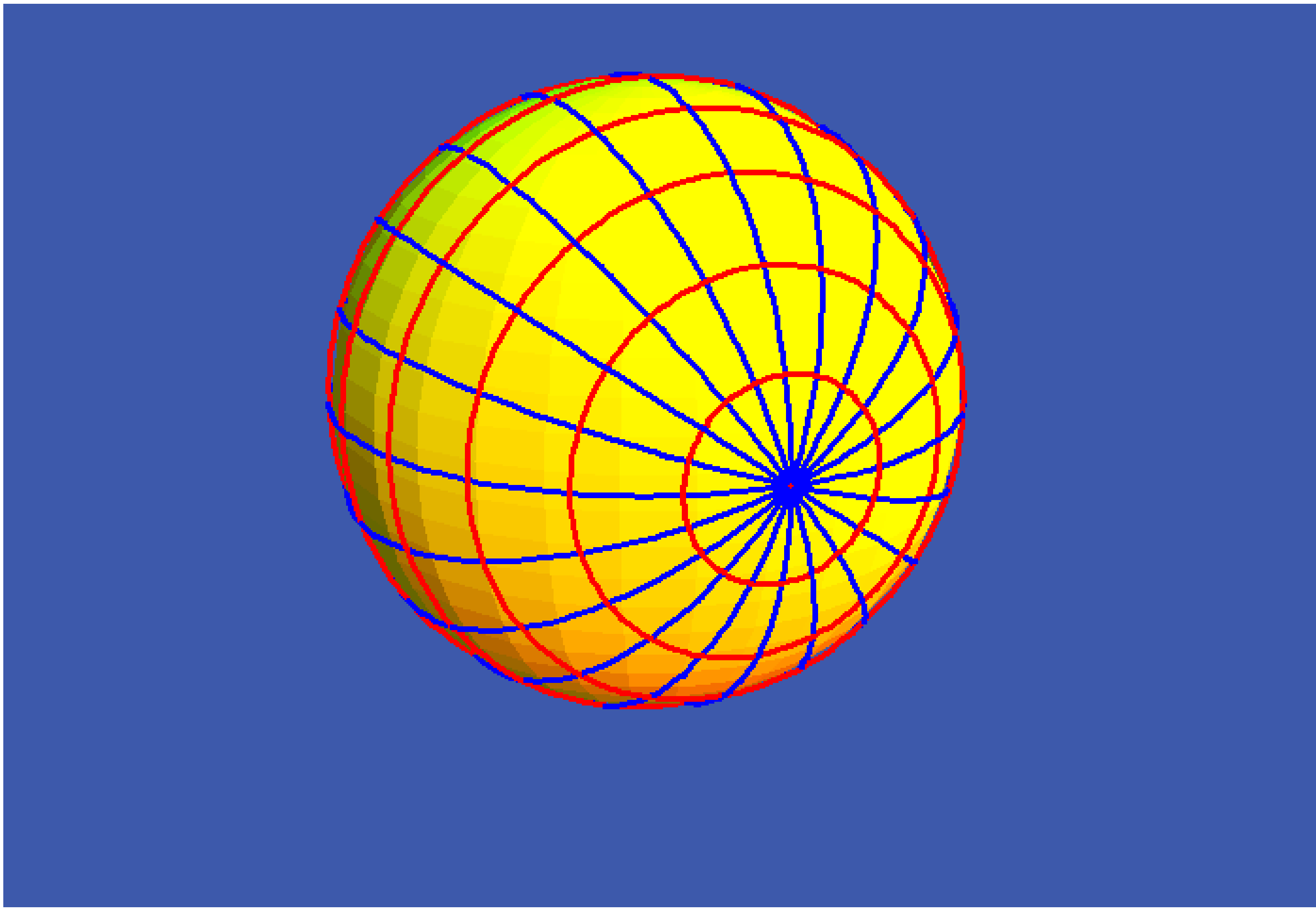
Da bi to učinio Gauss je prvo pokazao da ako se s bilo koje točke na plohi, skup geodezijskih krivulja iste duljine proširi, onda će krivulja koja spaja krajnje točke tih geodetskih crta biti okomita na sve geodezijske crte. (Vidi prikaz 4.)



Općenitije rečeno, pokazao je ako se povuče bilo koja proizvoljna krivulja na plohi, i geodezijske crte jednake duljine se povuku okomito na tu proizvoljnu krivulju, onda će krivulja koja spaja krajnje točke tih geodezijskih crta biti isto tako okomita na njih. (Vidi prikaz 5.)

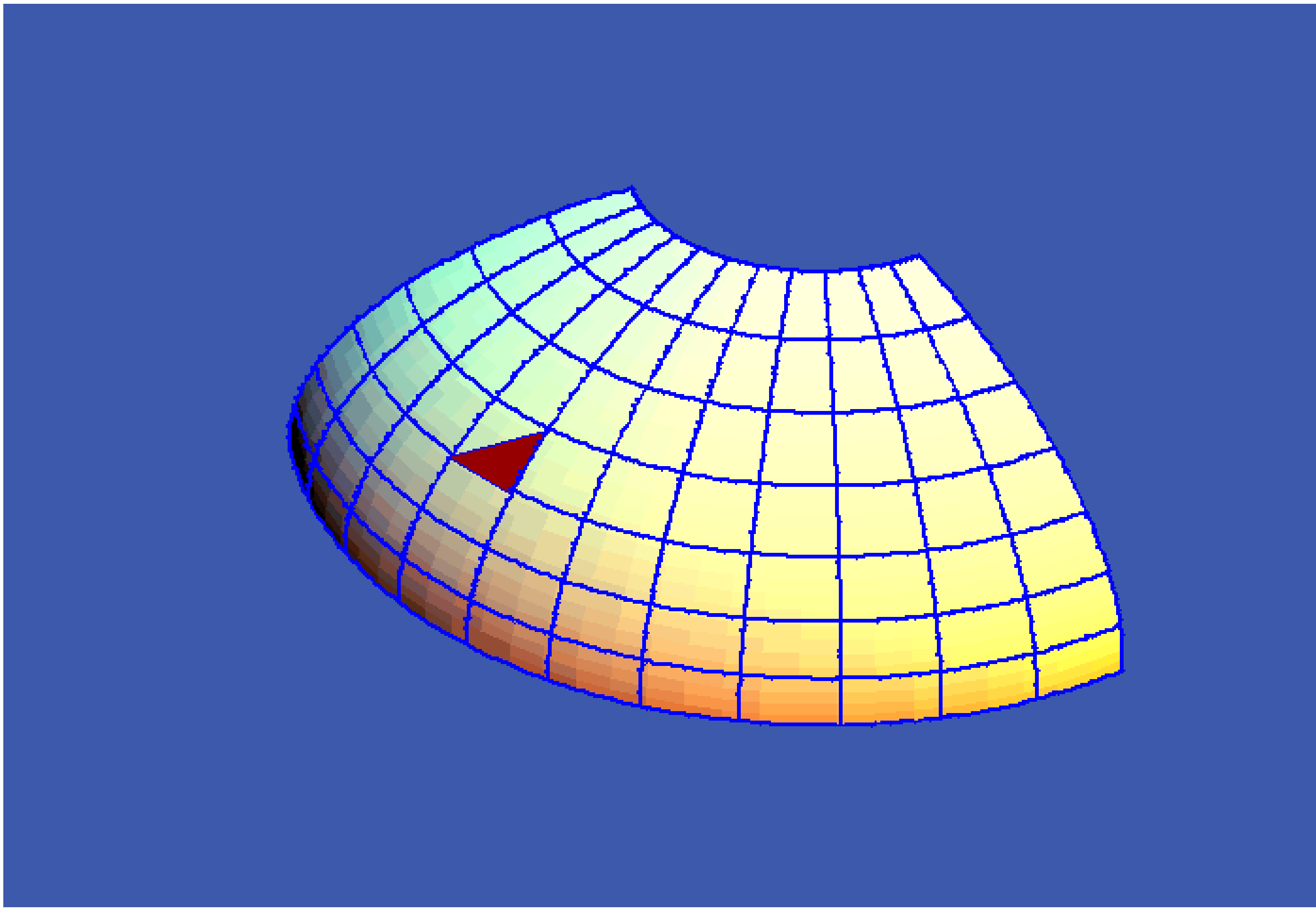


Kao posljedicu toga, na svakoj plohi postoji svojstveni skup pravokutnih krivulja, od kojih je barem jedna geodezijska crta. (Vidi prikaz 6.).



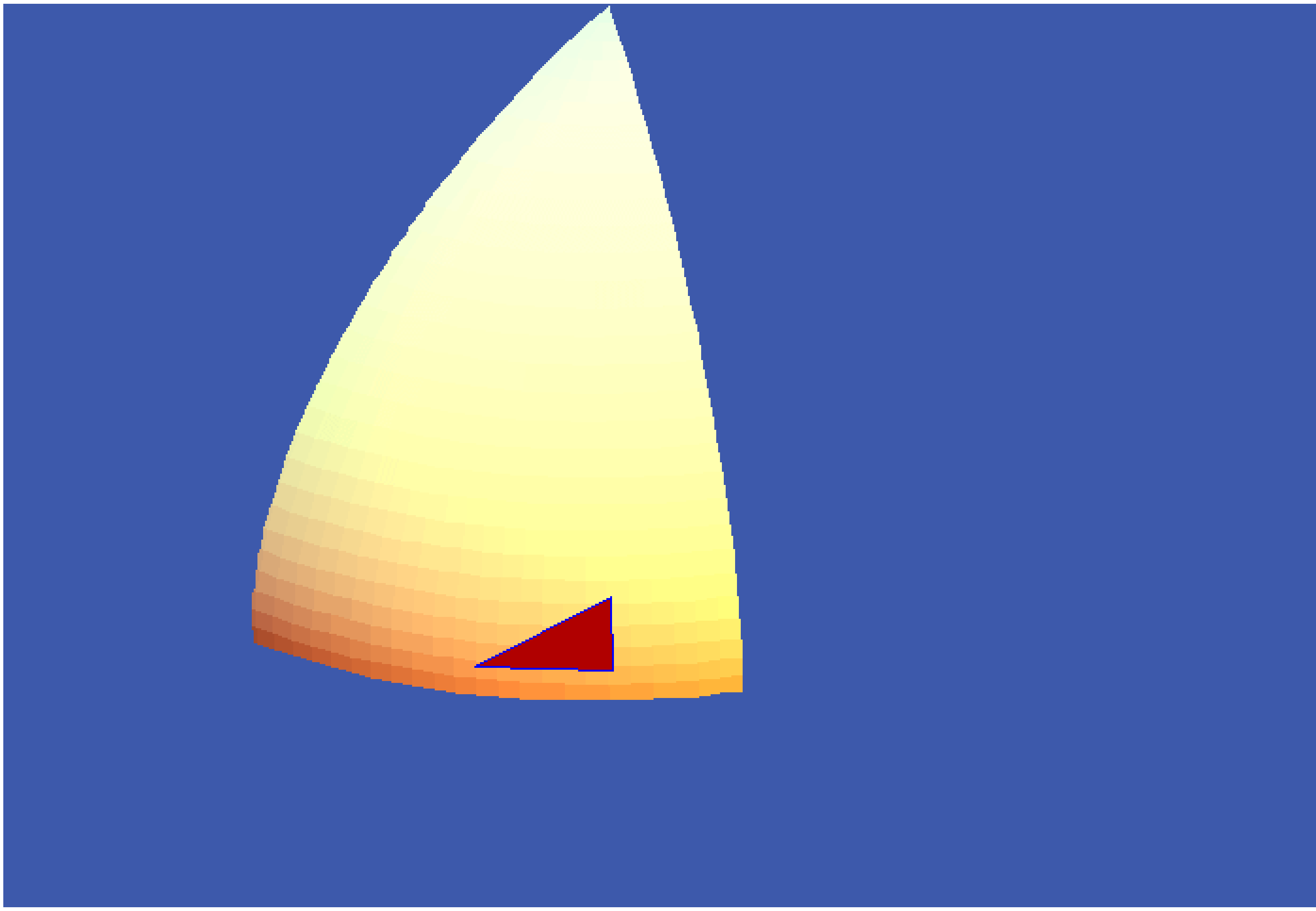
Tim načinom Gauss se riješio svih *a priori* koordinatnih sustava kao Descartesovog, i zamijenio ih skupom parametara koji su izraz fizičke prirode same plohe.

Iz toga Gaussu je bilo moguće razviti na koji se način može izraziti duljina geodezijske crte kao funkcija zakrivljenosti plohe i obratno. Ta duljina mogla bi se izraziti kao funkcija pravokutnih krivulja koje predstavljaju parametre plohe uopćenim oblikom Pitagorinog poučka. (Vidi prikaz 7.).



Nasuprot „ravnoj" euklidskoj plohi, gdje je odnos između duljine hipotenuze i krakova pravokutnog trokuta neovisan o svom položaju na plohi, na zakrivljenoj plohi taj odnos ovisi o svom položaju. Promjena je funkcija promjenljive zakrivljenosti plohe. Kao posljedicu toga Gaussova uopćena Pitagorina funkcija, zvana Gaussova metrička funkcija, izražava *promjenu* tog odnosa od mjesta do mjesta na plohi ovisno o *promjenljivoj* zakrivljenosti. (Vidi prikaz 8.)

Tenzor-animacija:\prikaz 008



Time je uspostavljen odredljivi funkcijski odnos između (metrike) duljine i zakrivljenosti.

S fizičkog stajališta to je značilo da je on bio u stanju izmjeriti promjenljivu zakrivljenost plohe iz fizički izmjerenih promjena duljine geodezijske crte u odnosu na fizičke parametre plohe. Gauss je primijenio tu metodu u svojim slavnim mjerenjima geografske dužine od Göttingena do Altone, iz koje je, na osnovi 16" odstupanja luka, razvio novu koncepciju čitavog oblika Zemlje!

No međutim, izraz tog odnosa između duljine i zakrivljenosti bio je matematički dosta zamršen. Kao posljedicu toga, Gauss je isto tako pronašao mnogo jednostavniji izraz odnosa ponašanja geodezijske crte i zakrivljenosti. Raspoznao je da u stvarnom *protu*-euklidskom svijetu, ne postoje nikakvi slični trokuti. Na svakoj zakrivljenoj plohi, zbroj kuteva trokuta oblikovanog najkraćim crtama uvijek je veći ili manji od 180 stupnjeva, ovisno o tome da li je ploha na kojoj trokut postoji pozitivo ili negativno zakrivljena.[15] Ta je razlika, koju je Gauss nazvao kutni eksces ili kutna pogreška, funkcija površine trokuta. Na pozitivno zakrivljenoj plohi što je veća površina trokuta veći je kutni eksces sve do maksimuma. Na negativno zakrivljenoj plohi što je manja površina trokuta to je veći kutni eksces, sve do minimuma od nule. Specifični omjer između kutnog ekscesa ili pogreške i površine, funkcija je zakrivljenosti. Na zakrivljenijem (na. pr. pozitivno) dijelu plohe, trokut koji obuhvaća malu površinu imat će veći kutni eksces od trokuta koji obuhvaća sličnu veličinu površine na manje zakrivljenom dijelu. Prema tome zakrivljenost dijela plohe se izražava promjenljivim odnosom između površine geodezijskog trokuta i kutnog ekscesa ili pogreške.

Na taj način Gauss je pokazao da se zakrivljenost plohe može mjeriti omjerom sfernog ekscesa ili (pogreške) i površine geodezijskog trokuta. To omogućava znanstveniku odrediti karakterističnu zakrivljenost plohe sa same površine plohe bez obzira na proizvoljnu fikciju euklidskog prostora, ili nekakvog proizvoljno fiksnog kartezijanskog ili drugog koordinatnog sustava.

Iako formule koje izražavaju ove odnose znaju postati veoma komplicirane, Gauss je razvio isto tako način tog izračunavanja, učinivši svoje koncepcije izravno primjenljivim na fizičke probleme koje je istraživao.

Tim načinom Gauss je napravio prvi korak da oslobodi čovječanstvo od dugotrajnog ugnjetavanja tiranijom euklidske geometrije. Njegov štićenik, Bernhard Riemann pogurao je to još dalje.

Kratki međučin o vremenu

Prije nego što se okrenemo izravno na Riemannov doprinos, nužno je obuhvatiti kratku opasku o zakonitosti najmanjeg hoda (djelovanja), kako zbog znanstvene cjelokupnosti predstavljene tvrdnje, tako i zbog toga da iščupamo čitatelja iz svake dugotrajne ovisnosti o *a priori* pojmovima prostora i vremena. Možda je čak i psihološki tvrdokornije prianjanje uz vjerovanje u neko absolutno mjerilo vremena, od tvrdokornog prianjanja uz prostorne odnose euklidske geometrije. Kao što je Platon naglašavao u Timeju, a kasnije se odjek toga vidi kod Filona, Augustina i Kuze, vrijeme nije absolutna veličina koju mjeri neka velika starinska ura na nebu. Vrijeme je omjer promjene. Kao što je Platon izrekao, *„vrijeme je pokretna slika vječnosti“.*

To je način na koji je Kepler shvaćao vrijeme. Umjesto mjerenja nejednolikog gibanja planeta mjerilom jednolikog absolutnog vremena (prosječnog Sunca) Kepler je mjerio vrijeme samim gibanjem planeta (istinsko Sunce). Uzeo je za jedinicu vremena jedinstveni interval u kojem je gibanje planeta jednako na početku i kraju čitave putanje. Jednaki dijelovi vremena mjereni tim jedinicama s jednakom količinom gibanja, to jest jednakim orbitalnim površinama, Te orbitalne površine su relativne naspram čitave putanje (orbite), a nisu absolutne. Prema tome gibanje planeta određuje što je vrijeme. Bez gibanja nema vremena.

Sličan problem postavio je i Fermat svojim naknadnim otkrićem da svijetlo putuje stazom najkraćeg vremena.[16] Kod običnog odraza staza svijetla je najkraća razdaljina. No kod loma, Fermat je pokazao, staza svijetla je put najkraćeg vremena. Razlika između dva fizička djelovanja (hoda) je ta što kod odraza nema promjene sredine u kojoj svijetlo putuje, dok kod loma ima. Promjena sredine prouzrokuje promjenu fizičkog svojstva mnogoznačnika djelovanja. Ta fizička promjena određuje novo ponašanje glede najkraće staze, to jest geodezijske crte. Kod odraza ta geodezijska crta je put najkraće razdaljine. Kod loma, to je najkraće vrijeme. Priroda svijetla se ne mijenja. Uvijek traži najkraću stazu. No kad se svojstva mnogoznačnika u kojem to svijetlo djeluje promijene, najkraća staza se promijeni od najkraće razdaljine na najkraće vrijeme.

Stoga opet, vrijeme nije absolutna veličina, nego svojstvo promjene fizičkog djelovanja—promjene u odlikama fizičkog prostorvremena.

U stvarnom svijetu nema absolutnog vremena. Postoji, kao što su Heraklit, Platon i Kuza naglašavali, *promjena*, a vrijeme je njeno relativno mjerilo. Najdjelotvorniji način da se čovjek odhrva od onesposobljavajućeg vjerovanja u absolutno vrijeme je u raspoznavanju očiglednog: *jedina jedinica absolutnog vremena je vječnost. Sva manja djelovanja su samo dijelovi vječnosti čije mjerilo je relativno naspram mnogoznačnika u kojem se odvija*.

Riemannovi mnogoznačnici i tenzori

Riemann je započeo 10. lipnja 1854. svoju docenstsku dizertaciju u tradiciji Hans Christiaan Andersonovog dječaka u priči o caru bez odjeće. Izjavio je, iako su pretpostavke euklidske geometrije bile prihvaćene kroz više od dvije tisuće godina nitko se nije ni potrudio razmotriti jesu li one istinite. Budući se svako fizičko eksperimentalno određeno djelovanje pokazalo *anti*-euklidsko, Riemann je tvrdio da se '*a priorne' pretpostavke* euklidske geometrije moraju poništiti i zabraniti ih u budućim razmatranjima u znanosti.

Riemann je nadomjestio proizvoljnu pretpostavku absolutnog euklidskog prostora idejom fizičkog mnogoznačnika djelovanja čije „dimenzije“ kao i parametri Gaussovih ploha, označuju fizičke zakonitosti koje djeluju u tom mnogoznačniku. Broj tih dimenzija nije *a priori* stalan, kao što su tri linearne dimenzije u euklidskoj geometriji, već se određuje brojem fizičkih zakonitosti koje se mora uzimati u obzir da bi se u cjelosti izrazilo fizičko djelovanje mnogoznačnika.

Stoge je Riemann proširio Gaussov pojam plohe na *n-struko prošireni mnogoznačnik*, od kojeg su Gaussove plohe samo posebni slučaj dvostruko proširenog mnogoznačnika. Na primjer, staza svijetla pod odrazom meže se smatrati kao geodezijaska crta u jednostavno proširenom mnogoznačniku, jer se položaj svijetla može u potpunosti odrediti jednim fizičkim parametrom, a to je kut upadanja. S druge strane staza svijetla kod loma je geodezijska crta dvostruko proširenog mnogoznačnika jer prisustvo dodatne zakonitosti zahtijeva određivanje položaja koje ovisi o dva parametra, a to su kut upadanja i indeks loma. Opet, nije svijetlost ta koja se mijenja od odraza do loma, nego mnogoznačnik u kojem djeluje. Ta promjena u fizičkim zakonitostima koje djeluju na mnogoznačnik proizvodi odgovarajuću promjenu svojstava geodezijske crte od najkraćeg puta do najbržeg vremena.

U krnjoj zabilješki, napisanoj između 1852. i 1853., prije obrane svoje docentske dizertacije, Riemann je dao primjer svoje koncepcije mnogoznačnika određenog *fizičkim* zakonitostima a ne *a priori* geometrijskim dimenzijama:

> Koncepcija mnogoznačnika mnogih dimenzija postoji neovisno o našim intuicijama prostora. Prostor, ravnina i pravac samo su najintuitivniji primjeri mnogoznačnika od tri, dvije odnosno jedne dimenzije. Ipak, bez i najmanje intuicije mogli bismo razviti stanovitu čitavu Geometriju. Želio bih to pojasniti primjerom:
> Pretpostavimo da želim izvesti pokus ili obzervaciju te da mi je veoma važno uspostaviti jednu numeričku vrijednost, recimo stupanj topline. U tom slučaju, svi mogući ishodi mogli bi se prikazati neprekidnim nizom numeričkih vrijednosti od pozitivnog beskonačnog do negativnog beskonačnog. No pretpostavimo da bih želio odrediti dvije numeričke vrijednosti, recimo želio bih odrediti temperaturu i odrediti težinu, onda bi ishod morao biti uvjetovan dvijema veličinama x i y. Tu bih dobio cjelokupnost svih slučajeva samo ako bih dao x(-u) i y(-u) sve vrijednosti između negativnog beskonačnog

> i pozitivnog beskonačnog, kombinirajući svaku vrijednost x sa svakom vrijednosti y. Dobio bih tako jedinstveni slučaj sve dok x uzet zajedno s y ima određenu vrijednost.
>
> Mogu sad izvaditi sveukupne slučajeve, skupine slučajeva, mogu na primjer uspostaviti jednadžbu ax + by +c = 0 i staviti sve te slučajeve zajedno gdje x i y zadovoljavaju tu jednadžbu, to jest uspio sam zvati tu skupinu slučajeva *pravcem*. Iz te definicije pravca mogao bih izvesti sve one teoreme o pravcu koji se nalaze u geometriji. Razvidno je, da bi čovjek mogao tako nastaviti bez da se oslanja na najmanje intuicije o prostoru.
>
> Ovim načinom obrade geometrije, ili teorije mnogoznačnika od tri dimenzije, svi aksiomi koje uzimamo ustaljenim načinom obrade intuicija o prostoru, kao na primjer, da kroz bilo koje dvije točke moguće je povući samo jedan pravac, prvi aksiom Euklida nestaje, a samo oni koji su općenito pravovaljani za veličine, na primjer, da je poredak sumanda proizvoljan, ostaju.
>
> Svatko može lako pronaći kako, na isti način, može dobiti mnogoznačnik dviju dimenzija, neovisno o postojanju ravnine, te isto kako može doći do veličine s proizvoljno mnogo dimenzija. Moramo samo vršiti zapažanja (obzervacije) koje (... se tiču određivanja mnogih numeričkih veličina – rečenicu završio Weber.)
>
> No zanimljivo je isto tako shvatiti mogućnost da bi ova obrada geometrije, unatoč tomu bila krajnje neplodonosna, jer ne bismo našli nikakve nove teoreme te da je ono što se lako i jednostavno postiglo predstavljanjem prostora samo postalo nešto zamršeno i teško. Čovjek mora, općenito, izabrati suprotan smjer tamo gdje naiđe na geometriju mnogoznačnika više dimenzija, kao kod proučavanja određenih integrala u teoriji imaginarnih veličina, čovjek koristi intuicije prostora kao pomoćno sredstvo. Dobro je znati kako se kroz ovo, može postići istinski pregled predmeta a samo ovim putem mogu se bitne točke izravno pokazati.

Stoga, s euklidskim *a priori* dimenzijama zamijenjenim fizičkim zakonitostima čiji broj i svojstva odražavaju fizičke odlike mnogoznačnika fizičkog djelovanja, palo je na Riemanna dati glavne crte načina kako izraziti funkcijski odnos između tih načela bez pribjegavanja bilo kakvim *a priori* pretpostavkama. Prvotni smjer toga dao je u svojoj docentskoj dizertaciji svojom koncepcijom razvoja *višestruko-proširene veličine*.

Djelovanje u *n-struko* proširenom mnogoznačniku, tvrdio je Rieman, mora se izraziti prikladnom *n-struko proširenom veličinom*. Takve veličine ***ne*** izražavaju nepromjenljivi, stalni skup odnosa kao u Euklidovoj geometriji. Radije, Riemannove *n-struko* proširene veličine su izraz ***dinamičkih*** odnosa između zakonitosti koje određuju fizičko djelovanje mnogoznačnika.

Elementarni primjer je drevno pitagorejsko istraživanje pravca, kvadrata i kocke. Zamislite pravac, kvadrat i kocku čiji su segment, stranica i brid svi jednake dužine. Jesu li sve te dužine ista veličina? Sa stajališta euklidske geometrije ili formalne algebre odgovor bi bio potvrdan. Ali sa stajališta fizičke geometrije Pitagorejaca, Gaussa i Riemanna odgovor je absolutno ne. Jedina veličina prikladna kvadratu je ona koja izražava dinamički odnos dužine i površine, za koju su Pitagorejci dokazali da je neizmjeriva s pravocrtnom veličinom. Slično tome, jedina veličina prikladna kocki je ona koja izražava dinamički odnos između dužine, površine i obujma. Pod tu kubičnu veličinu, svi obuhvaćeni odnosi su nanovo određeni. Na primjer odnos dužine i površine kod kubične veličine su različiti od dužine i površine kvadrata. Kao što konstrukcije Platona i Arhite pokazuju, svaki predmet nastaje izrazitom zakonitosti. Svaki je proizvod različitog fizičkog mnogoznačnika sa specifičnim brojem zakonitosti i izrazitom odlikom zakrivljenosti[17].

Riemann je oslobodio znanost sputavajućih učinaka pokušaja istraživati fzički svemir koristeći proizvoljna mjerila i satove absolutnog euklidskog prostora i vremena.

Jednom oslobođen, sam fizički svemir označava prikladne veličine kojima ga se treba mjeriti. Baš kao pitagorejsko prikazivanje razlike između pravca, kvadrata i kocke, Kuzino inzistiranje da se zakrivljeno nikad ne može mjeriti pravocrtnim, ili Keplerovo razumijevanje da planetarno gibanje određuje značenje vremena, Riemannova koncepciija *fizički određenog n-struko proširenog mnogoznačnika* određuje novi oblik veličine. Moderni pojam *tenzora* jedan je oblik takvih *n-struko* proširenih veličina, koji se odnosi na proučavanje fizičke ekonomije.

Tenzor je vrsta veličine u kojoj je izraz dinamičke sprege odnosa, unutar i između n-struko proširenih mnogoznačnika,predstavljen objedinjenom veličinom.

Iako postoje formalni matematički izrazi tenzora, kao onaj prikazan u Eisenhartovom opisu, te iako su te formule, u stanovitim prilikama korisne, ti izrazi u formulama ne utjelovljuju istinski Riemannovu ideju. Prvo se mora steći ideju, prije formula. Kao što je Riemann ukazao u krnjoj opaski ranije to se najbolje može postići putem pedagoške uporabe geometrijskih primjera. U tom pogledu, Riemann oponaša Platona, Kuzu i Gaussa, a svi su oni isticali metaforičku uporabu geometrije u prenošenju koncepcija koje leže van domene osjetilnih zapažanja. U takvim slučajevima, upozoravali su svi, da iako su geometrijski primjeri nužno potrebni našem shvaćanju, oni su samo vodilja a ne zamjena za koncepciju iz koje su nastali. U svojoj docentskoj dizertaciji Riemann je izdao sličnu opomenu:

> Ti odnosi mjerenja mogu se istraživati samo apstraktnim pojmovima veličine i mogu se povezano prikazati samo u formulama. Međutim, uz stanovite pretpostavke može ih se razlučiti u odnose koje se odvojeno može prikazati geometrijski, i time postaje moguće geometrijski izraziti rezultate računanja. Prema tome ako se treba stati na čvrsto tlo apstraktno je istraživanje putem formula uistinu neizbježivo, no njihovi rezultati će dopustiti izlaganje u ruhu geometrije. Za oba se dijela temelji nalaze u slavnoj raspravi povjerljivog viječnika Gaussa o zakrivljenim plohama.

Moderni pojam tenzora javlja se izravno iz Riemannove prvotne ideje o prirodi *n-struko* proširene veličine. Razvijajući tu ideju, Riemann je protegnuo Gaussove pojmove zakrivljenosti i metričke odnose s njegovih dvostruko proširenih ploha na Riemannove *n-struko* proširene mnogoznačnike. S tog stajališta, zakrivljenost izražava dinamički odnos međusobnog djelovanja *n* fizičkih zakonitosti u mnogoznačniku, dok metrika izražava ponašanje staza najmanjeg hoda, to jest geodezijskih crta, izraženih u mnogoznačniku. Da bismo shvatili te pojmove, moramo Riemannovo upozorenje držati na umu. Uzmite primjer Gaussove koncepcije zakrivljenosti i metrike kao posebni slučaj, i zamislite proširenje tih koncepcija u mnogoznačnike koji se ne mogu izravno predočiti. Što se izgubi nemogućnošću predočenja takvih mnogoznačnika izvana, dobije se prisilom da se otkrije njihovu prirodu iznutra. Započnite proširenjem ideje zakrivljene plohe na koncepciju zakrivljenosti trostruko proširene veličine—nazovimo to zakrivljenim obujmom. Da biste to učinili čovjek mora biti nemilosrdan u odbacivanju *a priori* pojmova euklidskog prostora. Takav zakrivljeni obujam nije neka velika četvrtasta kutija u kojoj se odvija djelovanje po krivulji, nego fizički mnogoznačnik određen djelovanjem triju fizičkih zakonitosti, ili jednom zakonitosti koja djeluje u tri smjera, kao na primjer u slučaju magnetskog polja Zemlje. Ako sad čovjek zamisli kako se kreće oko tog mnogoznačnika (kao kod pomicanja magnetske igle dok se kreće kroz magnetsko polje Zemlje), on bi iskusio promjenljivi učinak fizičkih zakonitosti kao izrazitu promjenu u zakrivljenju u svakom od (u ovom primjeru) tri smjera. No mogućnost uspostavljanja vidljivog prikazivanja (čak i ovako neadekvatnog kao ovaj navedeni), ove iste odlike u mnogoznačniku većem od tri, postaje uzaludna. No ipak, precizna se koncepcija takve višestruko proširene zakrivljenosti može oblikovati u glavi (umu).

Riemann je uopćio tu koncepciju pokazavši da u svakoj točki u *n-struko* proširenom mnogoznačniku ima *n(n-1)/2* izrazitih smjerova na toj plohi koji se presijecaju svaki sa svojom jedinstvenom zakrivljenosti, što zajedno određuje zakrivljenost mnogoznačnika koji djeluje u toj točki.[18] Te zakrivljenosti, koje sve mogu biti sasvim različite, mogu se mjeriti, kao što je to Gauss činio, kao omjer između ekscesa, ili pogreške, geodezijskog trokuta i površine koju taj trokut obuhvaća.[19] Riemann je definirao mjerilo zakrivljenosti u svakoj točki mnogoznačnika kao veličinu koja izražava *n(n-1)/2* izrazitih zakrivljenosti plohe u toj točki—veličina koja se sad naziva *Riemannov tenzor zakrivljenosti*.

Taj tenzor nije samo broj. On je veličina koja izražava kako se n(n-1)/2 izrazitih zakrivljenosti mijenja u svakoj točki, i kako se ta promijena ***mijenja*** *od mjesta do mjesta u mnogoznačniku*. Svaka izrazita zakrivljenost mjeri promjenu unutar jedne od ploha koje presijecaju jedna drugu. No, baš kao što kubična veličina određuje odnos između dužine i površine različito od kvadratne veličine, Riemannov tenzor zakrivljenosti određuje svaku nižu komponenti zakrivljenosti sa stajališta dinamike cjelokupnog mnogoznačnika.

U slučaju Gaussovih dvostruko proširenih mnogoznačnika *n(n-1)/2* jednako je jedan. Iz toga tenzor zakrivljenosti ima jednu komponentu—Gaussovo mjerilo zakrivljenosti kao što je to definirano ranije.[20] Za trostruko prošireni mnogoznačnik (zakrivljeni "obujam"), *n(n-1)/2* jednako je tri. Stoga, da bi se odredilo mjerilo zakrivljenosti u nekoj točki trostruko proširenog mnogoznačnika zahtijeva tenzor koji izražava funkcionalni odnos triju sastavnih funkcija, a svaka od njih izražava promjenljivu zakrivljenost plohe. Tenzor zakrivljenosti prema tome izražava promjenljivi odnos tih triju mjerila zakrivljenosti, *kao jednu sveobuhvaćajuću vrstu funkcije*. Opet, trostrukost te veličine ne može se izraziti jednostavno jednim brojem, ili jednostavno pomoću tri pojedina mjerila zakrivljenosti. Radije, potrebna je jedna *n-struko* proširena veličina, ili tenzor.

Za četverostruko prošireni mnogoznačnik, šest smjerova ploha presijecat će se u svakoj točki, uspostavljajući Riemannov tenzor zakrivljenosti koji izražava funkcionalni odnos između tih šest izrazitih mjerila zakrivljenosti.

Iako se takav mnogoznačnik ne može izravno predočiti, njegovo mjerilo zakrivljenosti može se Riemannovim postupkom jasno odrediti.

Uz to, tim pojmom zakrivljenosti *n-struko* proširenog mnogoznačnika, Riemann je definirao koncepciju *n-struko* proširenog mjerila. Da bi to napravio proširio je Gaussovo uopćenje pitagorejske metrike geodezijskog oblika s dvostruko proširenih na *n-struko* proširene mnogoznačnike. Podsjetite se da je Gauss pokazao da kod dvostruko proširenog mnogoznačnika duljinu geodezijskih crta izražavaju tri funkcije dvaju parametara koji određuju plohu.[21] Te tri funkcije izražavaju odnos između dužine, geodezijske crte i promjenljive zakrivljenosti plohe.

Kod trostruko proširenog mnogoznačnika, možemo zamisliti da umijesto geodezijske crte s dva parametra promjenljive zakrivljenosti (diferencijal površine) imamo tri takva parametra koji tvore, mogli bismo reći, diferencijal obujma. Kako se taj diferencijal obujma pomiče u mnogoznačniku, mijenja se i duljina geodezijske crte koju sadrži (u sebi). Da bi se izrazio odnos između duljine geodezijske crte i triju parametara koji određuju diferencijal obujma potreban je tenzor koji izražava funkciju između šest funkcija.

Opet, iako je vidljivo predočenje trostruko proširenog mnogoznačnika krajnje neadekvatno, čak i takvo neizravno predočenje nije moguće za mnogoznačnike čije je proširenje veće od tri. Unatoč tome Riemann je razvio preciznu koncepciju takve *n-struko* proširene metrike. Pokazao je da u *n-struko* proširenom mnogoznačniku postoje u načelu *n(n-1)/2* funkcije mnogoznačnika s *n* fizičkih parametara potrebnih za određivanje metrike.[22] Te *n(n+1)/2* funkcije su odtada postale poznate kao *Riemannov metrički tenzor*. One su izraz učinka promjenljive zakrivljenosti mnogoznačnika na mjerenja dužine geodezijskih crta.

Ovi navedeni primjeri, iako donekle apstraktni, ipak daju osnovicu oblikovanja pedagoške (u suprotnosti s tek formalne) koncepcije Riemannovih tenzora zakrivljenosti i metrike. *Definiran ugrubo, pojam Riemannovog tenzora izražava određeni skup funkcijskih odnosa između n fizičkih zakonitosti djelujući zajedno da bi izazvale ukupni učinak u jednom n-struko proširenom mnogoznačniku fizičkog djelovanja*.

Više od toga, Riemannovo proširenje Gaussovog pojma zakrivljenosti na *n-struko* proširene mnogoznačnike daje mogućnost određivanja fizičkih svojstava takvih mnogoznačnika iz infinitezimalnih izraza tih svojstava, to jest određuje ih iznutra samog mnogoznačnika.

Riemann je ne samo razvio model mjerodavnih tenzora nego je dao i eksperimentalni primjer i razradio način izračunavanja. U jednom pismenom uradku podnesenog Pariškoj akademiji znanosti 1861. kao odgovor na natječaj glede pitanja određivanja toka topline u homogenom čvrstom tijelu kao funkcije vremena i drugih dviju varijabli, Riemann je razvio fizički primjer zakrivljenosti *n-struko* proširenog mnogoznačnika. U tom je uradku napisao:

> Izraz (upiši jednadžbu uopćenog Piagorinog poučka) se može smatrati kao pravocrtni element u općem *n-struko* proširenom prostoru koji leži van naše intuicije. Ako u tom prostoru nacrtamo sve moguće najkraće crte iz točke $(s_1,s_2,...s_n)$ čiji se početni smjerovi mogu opisati odnosima: $\alpha ds_1+\beta\delta s_1$; $\alpha ds_2+\beta\delta s_2$; ...; $\alpha ds_n+\beta\delta s_n$ (α i β su proizvoljne veličine), te će crte oblikovati stanovitu plohu koju možemo zamisliti kao da se nalazi u uobičajenom prostoru naše intuicije. U tom slučaju izraz će biti mjerilo zakrivljenosti plohe u točki $(s_1,s_2,...s_n)$.[23]

Okretanje zvrka, o kojem smo raspravljali u prijašnjem nastavku ovog niza, pruža još jedan pedagoški primjer mnogoznačnika fizičkog djelovanja u kojem su nužni tenzori za izražavanje fizičkog djelovanja.[24] Kao što smo ranije govorili gibanje zvrka je posljedica njegovog promjenljivog odnosa prema gravitacionom potencijalu i kutnom momentu koji nastaje vrtnjom zvrka. Učinak svakog od njih se izražava vektorom koji ima tri komponentne funkcije. Stoga, da bismo opisali gibanje zvrka potreban je tenzor koji izražava promjenljivi odnos tih dvaju vektora. Taj tenzor opisuje fizički mnogoznačnik u kojem se zvrk vrti, koji opisuje, kao što je i sam Felix Klein bio prisiljen priznati, protu-euklidski mnogoznačnik. No suprotno Kleinu, koji je bahato tvrdio da je taj protu-euklidski mnogoznačnik čisto matematički i nema metafizičkog značenja, taj protueuklidski mnogoznačnik samo je jedan a ima i fizičku i metafizičku stvarnost.

Albert Einsteinova uporaba tenzora u njegovoj općoj teoriji relativiteta jedan je od poznatijih primjera primjene tenzora Riemannove vrste u fizici, gdje je on opisao gravitacijski odnos fizičkog prostorvremena skupom tenzora.

Ovi navedeni primjeri, međutim, samo su zagrebli po površini. Primjeri su istraživanja fizičkih mnogoznačnika u kojima su djelujuće zakonitosti ograničene na one povezane s abiotičkim [neživim] područjem. U *n-struko* proširenim mnogoznačnicima koje proučavamo u znanosti fizičke ekonomije, djeluju i fizičke zakonitosti biotičkih i spoznajnih područja. Što više, odnosi između tih zakonitosti (ili načela) *su dinamičko protuentropijski. Stoga je nužno proširenje tenzora Riemannove vrste da bi se opisao dinamički odnos između mnogoznačnika sve viših stupnjeva proširenja.* Prije nego što damo glavne crte ovakvih zahtjeva [koje bi oni zadovoljavali], potrebno je razmotriti drugu stranu stvari koju je Riemann istraživao.

Fizička topologija samoomeđenih mnogoznačnika

U diskusiji u prijašnjem poglavlju o općenitom obliku diferencijalne geometrije proširili smo pojam fizičke zakrivljenosti na mnogoznačnike određene s *n* fizičkih zakonitosti i istraživali kako se to svojstvo može izraziti u infinitezimalno malom. Ta vrsta istraživanje je odsudna za napredak znanosti, jer se upravo u infinitezimalno malim područjima mjere svojstva zakrivljenosti i metričkih odnosa, pa iz otkrivenih nepravilnosti u tim mjerenjima pronalazi postojanje i priroda novih fizičkih zakonitosti. Kao što je Riemann naglasi u svojoj docenstskoj dizertaciji, „Znanje uzročne sprege pojava zasniva se u biti na preciznosti kojom ih slijedimo u beskonačno malo".

No ta svojstva u malom, Riemann je razumio, ne određuje u cjelosti djelovanje u lokalnim područjima fizičkog mnogoznačnika. Baš kao što pojedini slučajevi koji su se dogodili tisuće godina ranije, ili nakana ostvariti neke rezulte za dva pokoljenja od danas utječu na neposredno djelovanje u društvu danas, lokalne odlike fizičkog mnogoznačnika odražavaju globalnu prirodu mnogoznačnika. Riemann je pokazao da se te globalne odlike određuju svojstvima kao što su broj singulariteta (osebujnosti), i uvjetima na granicama djelovanja. Ustvari, iako lokalna mjerila zakrivljenosti i metričkih odnosa mogu naveliko varirati unutar mnogoznačnika, postoje određena globalna svojstva koja imaju odlučujuće posljedice na njihovu fizičku važnost. Riemann se odnosio prema istraživanjima tih globalnih svojstava kao da pripadaju području „analysis situs"[†]. Kasnije je drugi Gaussov student, Johann Listing usvojio u svojim proučavanjima izraz „topologija" (po grčkoj riječi „topos" što znači položaj). Kao što će biti očitije malo kasnije, samo uzimajući u obzir odnos između topoloških i lokalnih odlika moguće je saznati išta o fizičkom procesu kojeg istražujemo.

U svojoj docentskoj dizertaciji i krnjoj opaski koju smo ranije citirali, Riemann je ukazao da okružje istraživanja odnosa između lokalnih i topoloških svojstava leži u [Riemannovom] proučavanju kompleksnih funkcija, u kojima opisuje pojam samoomeđenog, višestruko spojenog mnogoznačnika u obliku koji je kasnije postao poznat kao Riemannove plohe. Riemann je razvio početni rad na tom polju pod uplivom Gaussa u svojoj doktorskoj dizertaciji iz 1851. Zatim je nakon svoje docentske

[†] Analiza (matematička) sklopova ovisno o njihovom položaju, odnosno promjeni položaja, *op. prev.*

dizertacije produbio svoja istraživanja u svom slavnom proučavanju abelskih funkcija, minimalnih ploha i hipergeometrija[25].

Iako je Riemannovo otkriće na tom području jedinstveni napredak znanja, njegovi korijeni dosižu unatrag do Platona i Pitagorejaca, koji su tvrdili da sva istraživanja svemira moraju početi s koncepcijom prirode svemira kao cjeline. U ***Timeju*** Platon opisuje prirodu kao monoteističku koncepciju da je svemir jedinstveno stvaralačko djelo jedinstvenog stvoritelja. Platon kaže da bi geometrijski izraz takvog samoomeđenog svemira uzeo kuglasti oblik:

> Tom, pak, živom biću koje je stvoreno da unutar sebe obuhvati sva živa bića najprikladniji oblik će biti onaj koji sadrži unutar sebe sve oblike koji postoje. Zbog toga razradio ga je okruglog, u obliku kugle, jednako udaljene u svim smjerovima od središta do krajnjih granica, koja je od svih oblika najsavršenija i sebi najsličnija, jer je On smatrao da je slično beskonačno ljepše od različitog. Pa je izvana oko okruglog sve glatko izgrađeno velikom pomnošću, i to iz mnogih razloga.

Riemann je ponovno potvrdio taj pojam konačnog, samoomđenog svemira u svojoj docentskoj dizertaciji ali s višeg stajališta svog pojma višestruko proširenog mnogoznačnika:

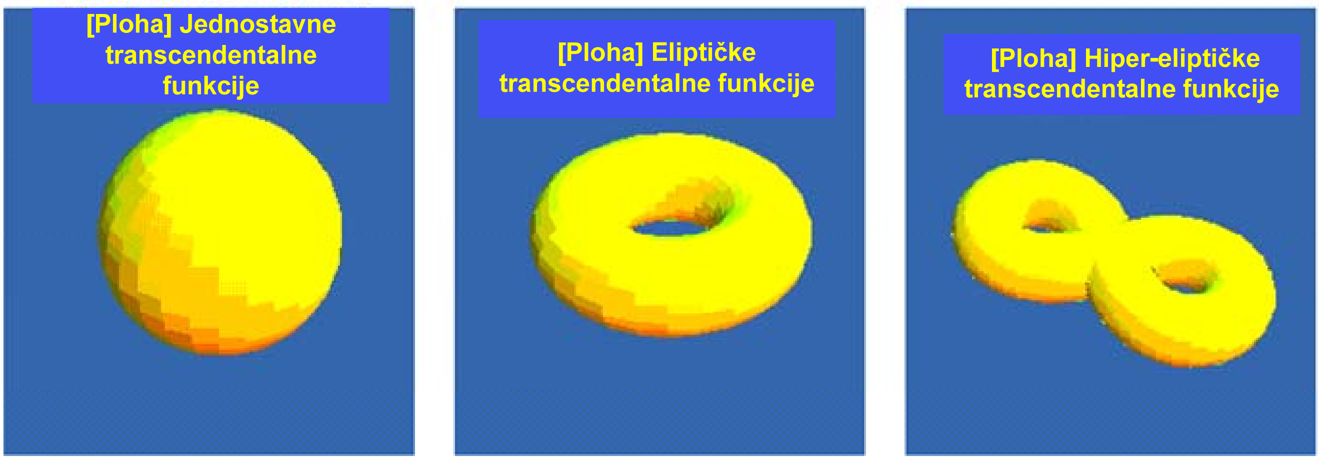
> Neograničenost prostora ima stoga veću vjerojatnost, empirički, nego svako iskustvo vanjskog [svijeta]. Iz toga, međutim, nikako ne slijedi zaključak o beskonačnosti [prostora] nego dapače suprotno on bi bio konačan ako pretpostavimo da su tijela neovisna o situaciji i time pripišemo prostoru nepromjenljivo mjerilo zakrivljenosti, uz uvijet da to mjerilo zakrivljenosti ima stanovitu pozitivnu vrijednost kolikogod malu. Kad bismo produžili elemente smjera, koji leže u bilo kojem elementu plohe u najkraće crte (geodezijske) dobili bismo neograničenu plohu s određenom konstantno pozitivnom mjerom zakrivljenosti, pa bi prema tome ploha uzela, u trostruko proširenom mnogoznačniku, oblik kuglaste plohe i bila bi stoga konačna.

Platon je isticao da topološko svojstvo samoomeđenog svemira isto tako određuje svojstvo koje će moderna znanost naznačiti kao „kvantizaciju“. To se izražava, s Platonovog gledišta, jedinstvenošću pet pravilnih platoničkih geometrijskih tijela i semi-pravilnih arhimedskih tijela kao jedinstvenih podjela kuglaste plohe.[26] Daljnji napredak je došao na tom polju iz istraživanja Luke Paciolija i Leonarda da Vincija, naročito u da Vincijevom isticanju značenja tih stvari kod razlikovanj abiotskog i biotskog područja. Značajan novi napredak tom shvaćanju dalo je Keplerovo otkriće novog oblika regularnog geometrijskog tijela, takozvana Kepler-Poinsotova pravilna zvjezdana geometrijska tijela, i Napierovo istodobno otkriće ‘pentagramma mirificum’. Iz proučavanja kristalografije o kojima je Kepler izvjestio u svom radu na snježnoj pahuljici, Kepler je proširio taj pojam na područje trostruko proširenog mnogoznačnika, na što je kasnije ukazao u gore citiranom poglavlju svoje docentske dizertacije.

No od Arhitine konstrukcije udvostručenja kocke do Keplerovog određivanja eliptičke prirode planetarih putanja, eksperimentalni dokazi ukazivali su na to da je fizičko djelovanje omeđeno višim oblikom djelovanja nego onim kojeg te koncepcije sfernog djelovanja izražavaju.

Rješenje tog paradoksa počelo je izlaziti sve više na svijetlo dana otkrićima kao Gaussovim ponovljenim gledanjem na pravilna i semi-pravilna geometrijska tijela sa stajališta općih zakonitosti zakrivljenosti, čiji smo pregled dali ranije, njegovim otkrićem sprege Napierovog pentagramma mirificum s eliptičkim funkcijama, njegovim radom o značenju aritmetičko geometrijske srednje vrijednosti i dubljem smislu njegovog uvida u podjelu kruga, elipse i bikvadradskih ostataka.

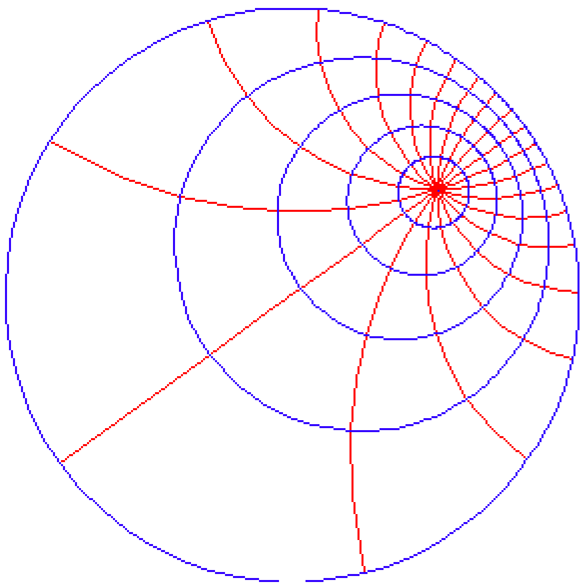
Ova otkrića nagovijestila su Riemannov uvid u dublju prirodu topoloških posljedica, koje je razvio u svom proučavanju minimalnih ploha, abelovih i hipergeometrijskih funkcija[27]. Kod tih proučavanja Riemann je razvio koncepciju višeg pojma samoomeđenosti, koja se izražava slijedom relativno samoomeđenih mnogoznačnika povezanih s Riemannovim plohama nastalim u sprezi s proširenom klasom transcendentalnih funkcija znanih kao abelove funkcije. Riemann je pokazao da je svaki rod transcendentalnih veličina povezan s povećanom gustoćom singulariteta, koji se izražava u odgovarajućoj Riemannovoj plohi promjenom svojih topoloških svojstava (Vidi prikaz 10.)



Baš taj Riemannov pojam samoomeđenosti mjerodavan je pristup modernoj fizikalnoj znanosti.

Bitno svojstvo Riemanovih ploha, tvrdio je Riemann, je njihovo izražavanje kako je on to zvao „Dirichletovog načela“,[28] fizičke zakonitosti koju je usvojio od svog učitelja Lejeune-a Dirichleta, čija je predavanja o Gaussovoj teoriji potencijala pohađao na Berlinskom sveučilištu. U tim studijima Gauss i Dirichlet su uopćili Leibnizov početni rad na dinamici, proučavanjem sile teže, magnetizma i elektriciteta. Kao što su Leibniz, Gauss i Dirichlet isticali, posebne odlike fizičkog djelovanja posljedica su svojstva najmanjeg hoda, „potencijala“, fizičkih zakonitosti koje vode to djelovanje. Gauss je definirao kao „funkciju potencijala“, funkciju koja opisuje karakterističnu zakrivljenost izraženu tim svojstvima najmanjeg hoda. Drugim riječima, fizičke zakonitosti kao sila teža, magnetizam i elektricitet uspostavljaju *protu*-euklidski mnogoznačnik čiju se prirodu može izraziti općim zakonitostima zakrivljenosti koje je Gauss razvio. Na predavanjima koja je Riemann pohađao, Dirichlet je isticao da se ta funkcija potencijala može izraziti sklopom harmoničkih funkcija, to jest funkcija čija je stopa promjene zakrivljenosti jednaka po veličini i okomita na smjer, te da takve harmoničke funkcije nužno izražavaju za potencijal svojstvo najmanjeg hoda.

Nadalje, Gauss i Dirichlet su isto tako raspoznali da specifičnu odliku funkcije potencijala određuju uvjeti graničnog područja djelovanja. Na primjer ploha magneta ili Zemlje u slučaju magnetizma ili sile teže ili uvjeti na graničnom prelazu tijela koje vodi toplinu, kao kod primjera kojege je razvio Riemann a mi smo ga citirali ranije. Iz toga Dirichlet je pokazao da se odlike funkcije potencijala diljem mnogoznačnika mogu točno odrediti uvjetima graničnog područja i mijenjati s promjenom tih uvjeta. (Vidi prikaz 11).
Tenzor-animacija;\prikaz 011



Riemann je otišao još dalje. Raspoznao je da Dirichletovo načelo izražava jedinstvenu odliku funkcija kompleksne varijable. Kad se takve funkcije prikažu Riemannovim plohama, Dirichletovo se načelo proteže te obuhvaća fizičke mnogoznačnike s rastućom gustoćom singulariteta, kao što je Riemann pokazao u svom radu na abelovim i hipergeometrijskim funkcijama.

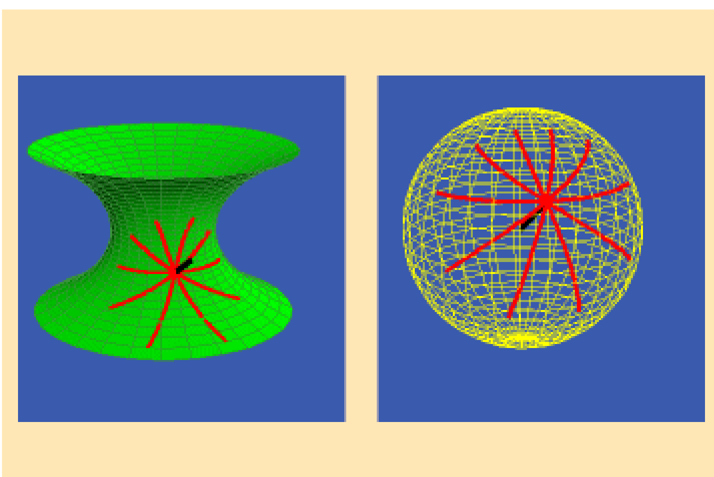
To je značilo da Riemann može prikazati odnos između odlika zakrivljenosti u infinitezimalno malom i globalnih odlika mnogoznačnika, točnije broj, odlike i gustoću singulariteta.

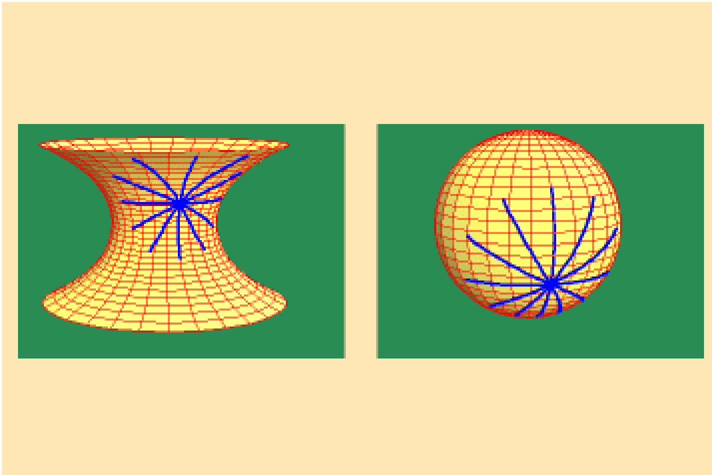
Pedagoški se to može slikovito prikazati primjerom. Prvo, uzmite kuglu, koja je oblik Riemannove plohe jednostavnih transcendentalnih funkcija povezanih s kružnim, hiperboličkim i eksponencijalnim funkcijama. Svaka takva funkcija određuje različiti skup gausovskih parametara iz kojih se određuju metrički (mjerni) odnosi. No metrički odnosi važe samo za lokalne prilike. Na primjer, postoji samo jedna geodezijska crta između bilo kojih dvaju točaka samo ako su te točke blizu jedna drugoj. No ako su one polovi postoji neizmjeran broj geodezijskih crta koje ih spajaju. Riemann je pokazao da na kuglastoj plohi postoje prirođeno uvijek dva takva pola (singulariteta!). Takve plohe Riemann je definirao kao „jednostavno spojene“. Nadalje, Riemann je pokazao da je to odlika svake jednostavno spojene plohe, pa budući se svaka jednostavno spojena ploha može preslikati na kuglu bez promjene svojih harmoničkih odnosa (to jest, konformno), ta odlika je „topološka“, to jest neovisna o specifičnim pojedinim metričkim odnosima. No pored toga određuje uvjete pod kojim ti metrički odnosi postoje.

Pogledajte sad slučaj prstena (torusa), koji je ploha koju povezujemo s eliptičkim transcendentalima. Ovdje se odvija jedna sasvim drugačija prilika. Kao što su Gauss i Riemann pokazali, ta vrsta transcendentala izražava višu moć fizičkog djelovanja od jednostavnih transcendentala. Ta viša moć se izražava povećanom gustoćom singulariteta, koji se na Riemannovoj plohi pokazuju kao promjena topoloških odlika mnogoznačnika. Riemann je označio te plohe ka što je prsten „dvostruko spojenim". Doduše, suprotno slučaju jednostavno spojenih mnogoznačnika, dvostruko spojeni mnogoznačnici se ne mogu konformno preslikati jedan na drugi. To znači da mnogoznačnik dvostruko spojenih mnogoznačnika ima, u stanovitom smislu, veći stupanj „kvantizacije", a tu je koncepciju Gauss razmatrao u svom istraživanju aritmetičko geometrijske srednje vrijednosti[29]. No, kao što će postati jasnije malo kasnije, ta promjena topologije povezana je isto tako s temeljnom promjenom prirode zakrivljenosti mnogoznačnika.

Promjena postaje očigledna kad se Gaussova koncepcija zakrivljenosti spoji s pojmom Riemannovih ploha, kao što je to učinio Riemann u svom proučavanju minimalnih ploha. Minimalne plohe, kao katenoid, izražavaju fizičku odliku najmanjeg djelovanja. Ta odlika se izražava činjenicom da je prosječna zakrivljenost minimalne plohe svugdje konstantna. Riemann je pokazao da su Gaussovi preslici minimanih ploha konformni prema originalnoj plohi. (Vidi prikaz 12.)

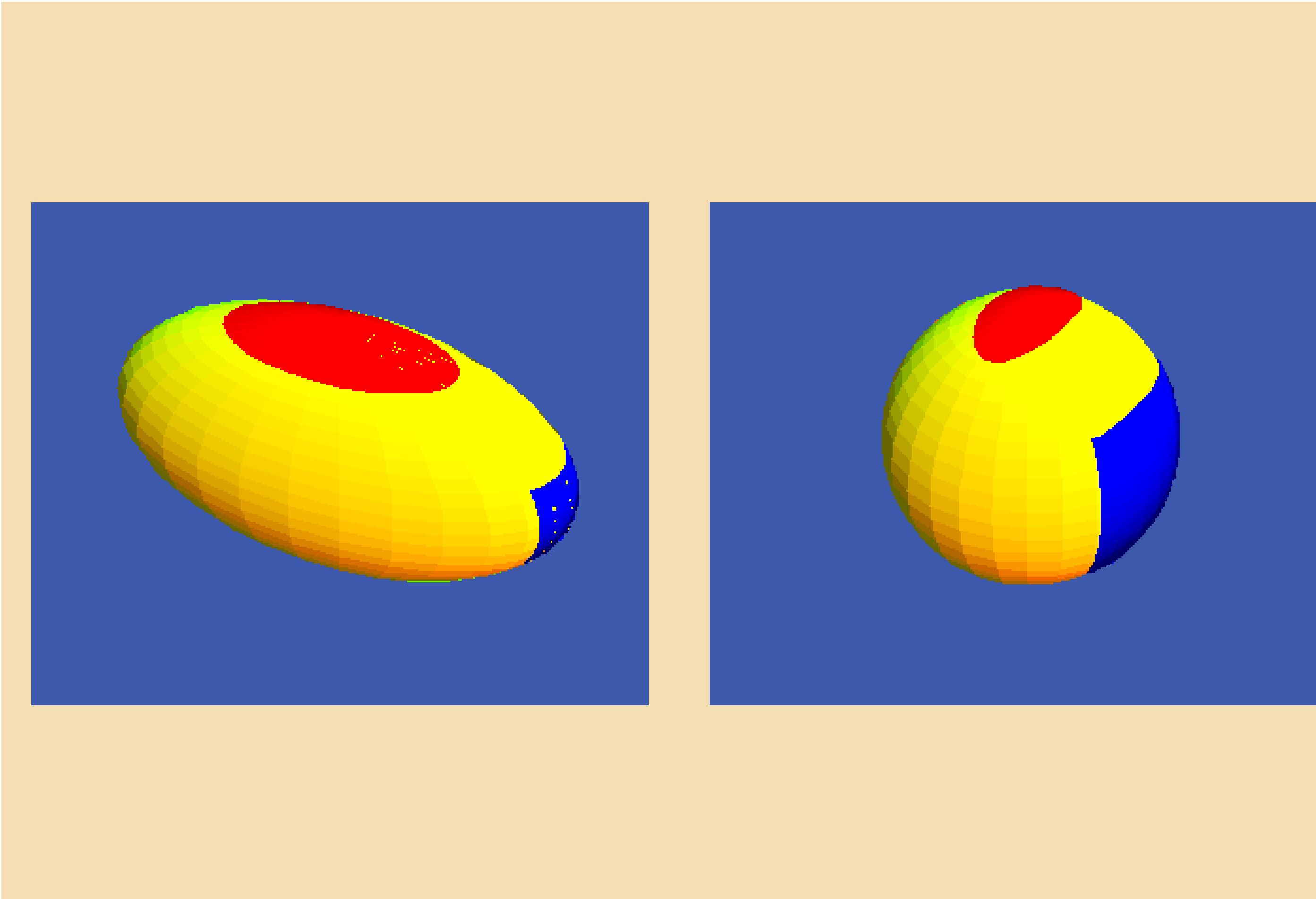
Tenzor-animacija:\prikaz 12a





Budući da njegove plohe, nastale iz kompleksnih funkcija odražavajući harmoničke odlike Gaussovih i Dirichletovih funkcija fizičkog potencijala, imaju isto tu odliku, one podrazumijevaju odgovarajući Gaussov preslik.

No jedan čak i dublji uvid izbija na svijetlo dana kad pogledamo dublje u topološku spregu Riemannovih ploha i Gaussovih preslika. Započnite to istraživanje bacivši pogled na zakrivljenost jednostavno spojenih ploha. Kao što smo govorili ranije, dijelovi tih ploha koji su zakrivljeniji stvarat će velike površine na Gaussovom presliku a dijelovi s manjom zakrivljenosti stvorit će malu površinu na Gaussovom presliku. (Vidi prikaz 13.)



Pa iako zakrivljenost može na plohi varirati naširoko od mjesta do mjesta , ukupna zakrivljenost plohe, to jest Gaussovog preslika čitave plohe bit će ista za svaku jednostavno spojenu plohu!

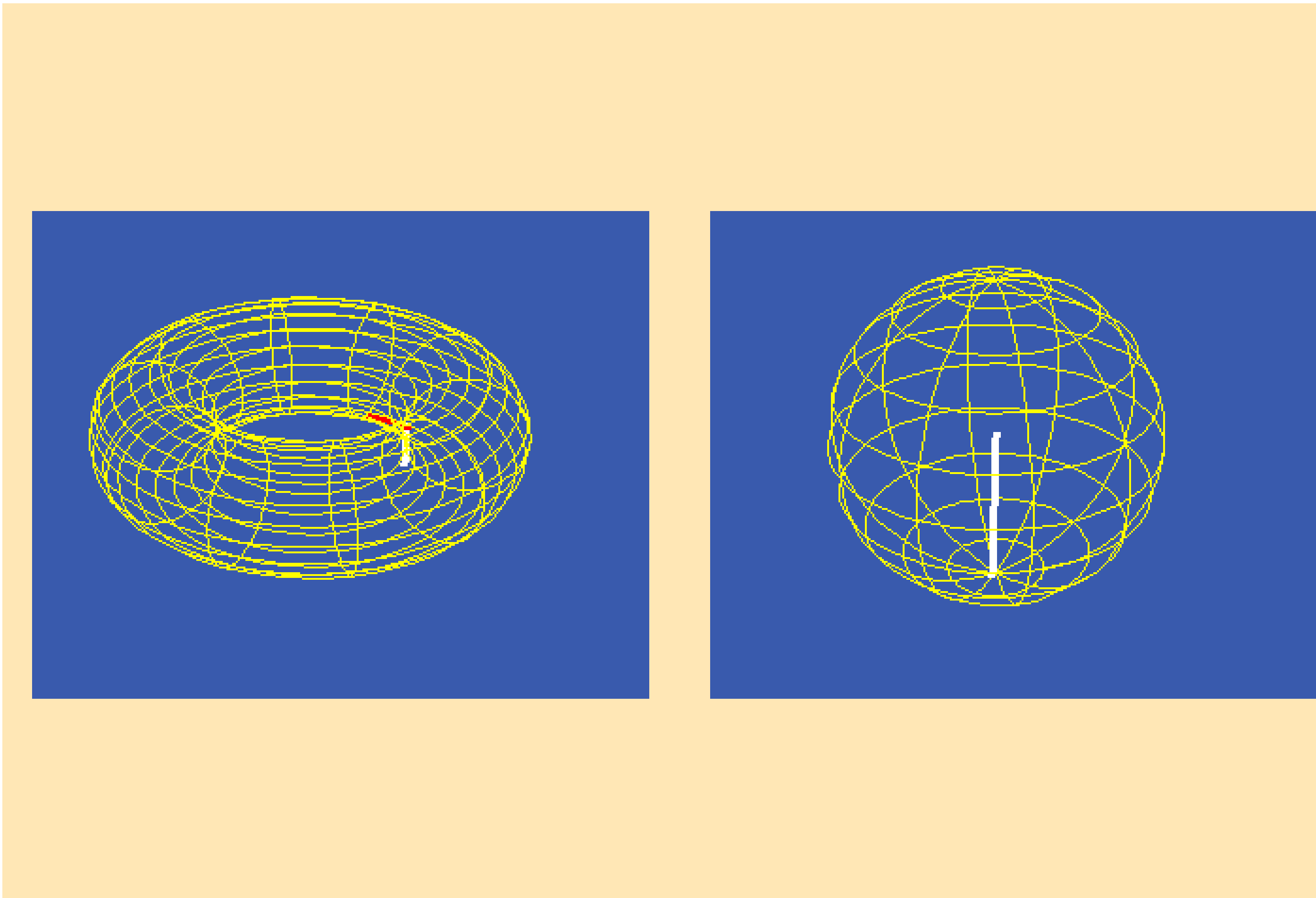
To bi izgleda moglo voditi do poraznog zaključka kad bismo se tvrdokorno držali ideje da je oblik svemira naprosto kuglast. Jer u tom slučaju ukupna zakrivljenost svemira bila bi stalna, prema tome lokalna zakrivljenost bi se mogla mijenjatim ali takve promjene ne bi mogle utjecati na sveopću zakrivljenost samog svemira. Ta ideja odgovara aristotelovskoj dogmi da, iako promjena može nastati u malom, u sveopćem stanju stvari u svemiru temeljna promjena ne bi bila moguća. Tom viđenju, naravno, suprotstavljaju se eksperimentalni dokazi fizikalne znanosti i povijesti čovječanstva, čija otkrića i primjene univerzalnih zakonitosti su doveli do promjena koje se jedino mogu izraziti kao promjena ukupne zakrivljenosti svemira.

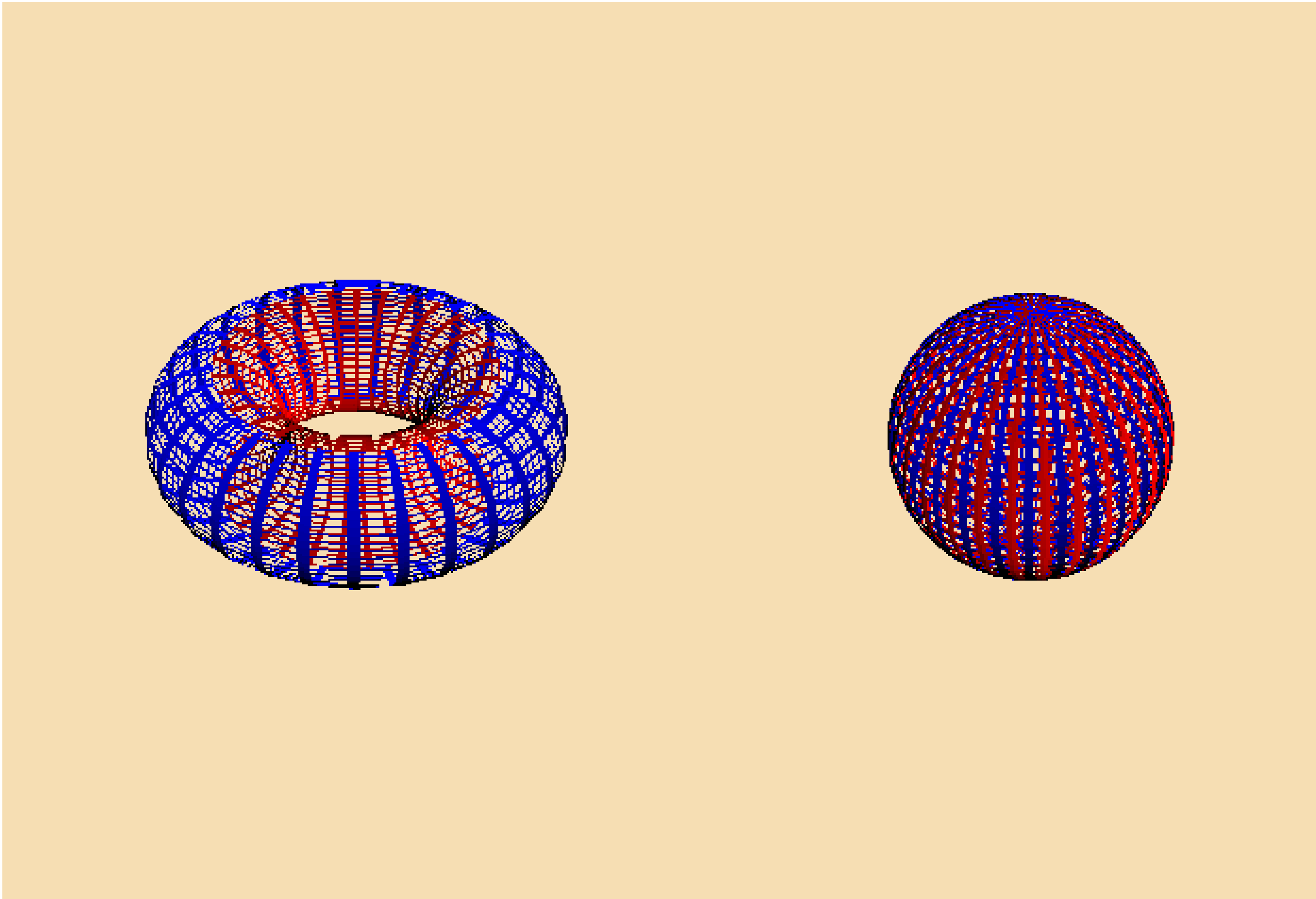
Srećom, kao što je Riemann ukazao, naši umovi nisu ograničeni na jednostavno spojene mnogoznačnike. Na osnovu njegovih otkrića možemo oblikovati koncepciju prikladniju *protuentropijskoj* prirodi stvarnog svemira, a to je: *slijed mnogoznačnika s rastućom spojenošću povezan sa sve većim promjenama ukupne zakrivljenosti mnogoznačnika*.

Pogledajte, pak, Gaussov preslik prstena, kao prinmjer dvostruko proširenog mnogoznačnika. Vanjska ploha prstena je pozitivno zakrivljena a nutarnja negativno.

Kružnice koje tvore granicu dvaju područja imaju nulu zakrivljenosti. Prema tome zakrivljenost prstena je kompleksnija od jednostavno spojene plohe. To postaje očigledno iz Gaussovih preslika. Vanjski dio prstena preslikava se na čitavu kuglu, a nutarnji se isto preslikava na čitavu kuglu,samo u suprotnom smjeru. (Vidi prikaz 14.)

[Tenzor-animacija:\prikaz 014a]

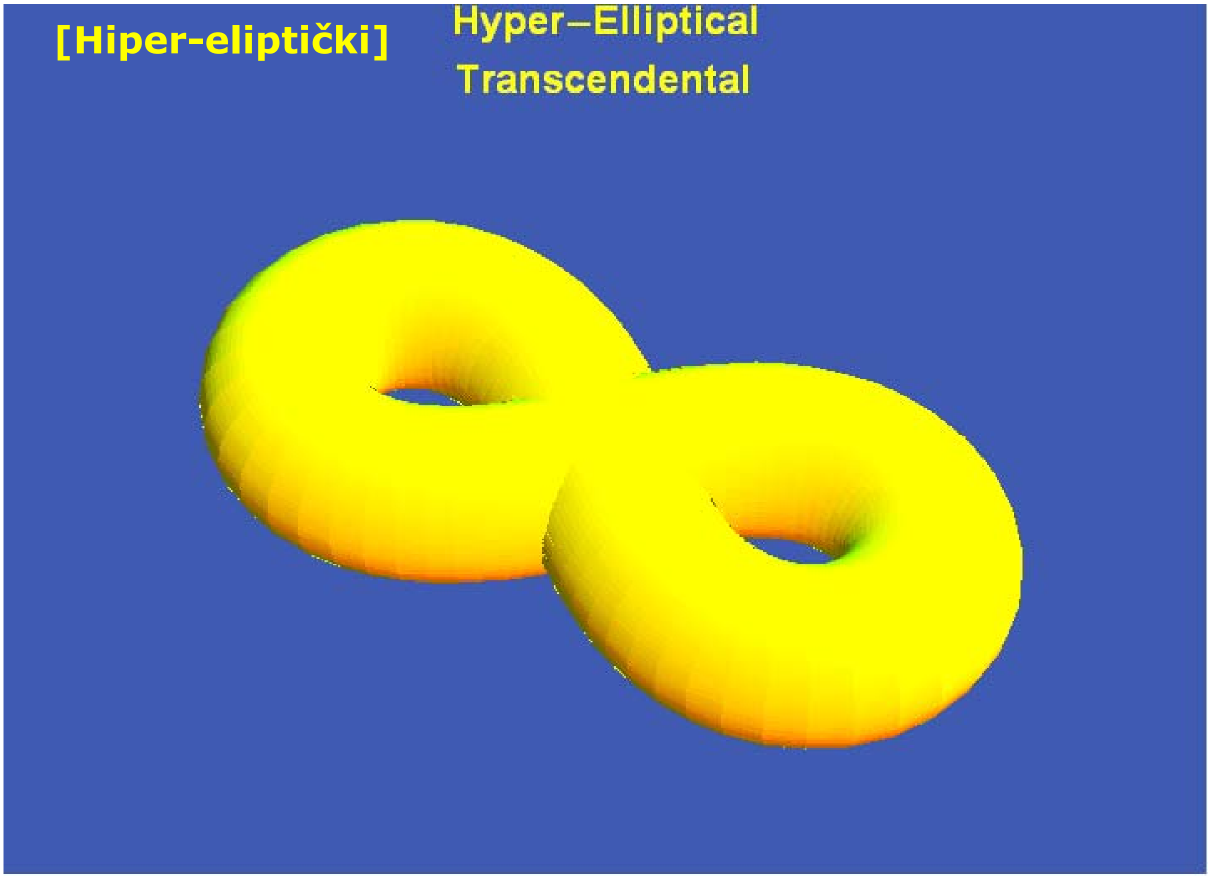




Kružnice na graničnom području preslikavaju se na polove. Prema tome Gaussov preslik prstena je i sam Riemannova ploha ukupne zakrivljenosti nula!

To nam pruža bolju koncepciju nulte zakrivljenosti nego ideja ravne plohe. Umjesto da mislimo na mjerilo nule zakrivljenosti kao euklidsku ravninu, možemo misliti na na zakrivljenost od nule kao ukupni učinak mnogoznačnika s jednakim količinama pozitivne i negativne zakrivljenosti. Lokalna zakrivljenost u takvom mnogoznačniku može biti ili negativna ili pozitivna, što je isto moguće za jednostavno spojenu plohu. No značenje lokalne zakrivljenosti u svakom mnogoznačniku je sasvim drukčije.

Iz ove usporedbe jednostavno spojene plohe s ukupnom zakrivljenosti jednakom jednoj kuglastoj plohi, i prstenom s ukupnom zakrivljenosti nula, moglo bi izgledati da ne idemo naprijed prema koncepciji svemira s mogućnosti stalno promjenljive zakrivljenosti. No taj privid se ispravi kad pogledamo na Gaussove preslike trostruko spojenog mnogoznačnika povezanog sa sljedećim višim rodom transcendentalne veličine, hiper-eliptične. (Vidi prikaz 15.)



Ovakav mnogoznačnik ima jedno pozitivno zakrivljeno područje i dva negativno zakrivljena. Stoga Gaussov preslik bit će jedna pozitivna kuglasta ploha i dvije negativne pa će ukupna zakrivljenost biti -1 kuglasta ploha.

Ako sad zamislimo čitav mnogoznačnik Riemannovih ploha, vidimo mnogoznačnik mnogoznačnika s rastućom gustoćom singulariteta, i s ***diskontinuirano*** (isprekidano) rastućom *negativnom* ukupnom zakrivljenošću. Takvi prekidi između promjena ukupne zakrivljenosti odgovaraju promjeni nastaloj uvođenjem potpuno novog načela koje djeluje na mnogoznačnik. Ta promjena prouzrokuje odgovarajuću promjenu kvantizacije mnogoznačnika. Ta ideja, zajedno s Riemannovom idejom *n-struko* proširenih veličina, *tenzora*, tvori temeljnu koncepciju potrebnog pristupa isttraživanju fizičke ekonomije.

To međutim zahtijeva razvoj još višeg oblika tenzora.

Riemannovi tenzori u ekonomiji–Preliminarni pristup

Držeći sve ovo na pameti, mogli bismo pokušati izvesti skicu preliminarnog pristupa konstrukciji veličina jednakih tenzoru Riemannove vrste prikladnim opisu fizičko ekonomskih procesa. LaRouche je razvio načela i zakonitosti na kojima se to zasniva u mnogim svojim radovima, a najmjerodavnije u svom nedavnom radu ***Dinamika i ekonomija***. [vidi Schiller-Institut-Hrvatska]

Takve višestruko proširene veličine moraju izraziti interakciju abiotskih, biotskih i spoznajnih načela kao dinamiku društvene interakcije između ljudi, koja [dinamika] sama djeluje na abiotsko, biotsko i spoznajno područje. S tom se dinamikom ne može postupati kao nepromjenljivom, makar i nelinearnom interakcijom, nego kao dinamikom koja se sama mijenja zbog svojevoljnog djelovanja stvaralačkih moći čovjeka. Stoga, fizičko ekonomski mnogoznačnik djelovanja mora se smatrati kao *mnogoznačnik rastućeg potencijala stvaranja ideja*.

Kao takav, nikakv oblik niza ili matrice podataka i funkcija (čak i algebarski nelinearnih), kao oni na koje upućuje formalna matematičk razrada tenzora nije podesan. Radije, ove odlike malik na fizičko ekonomske tenzore bolje se mogu izraziti oblikom animacija koje je LaRouche precizirao.

Na primjer, zakonitost univerzalne gravitacije se ne može izraziti kao niz matematičkih odnosa ni u obliku kojeg moderni školski udžbenici izlažu kao „Keplerovi zakoni“, ili lažnije, kao posljedicu izopačenog oblika Newtonove formule recipročnog kvadrata. Svaki istinski izraz zakonitosti univerzalne gravitacije mora izražavati tu zakonitost otkrića koje djeluje u smislu promjene dinamike svemira. Mora se uzeti u obzir da je gravitacija djelovala kao zakonitost u svemiru i na njega prije Keplerovog otkrića i razrade tog otkrića. *No Keplerovim otkrićem i širenjem tog otkrića kroz naknadna pokoljenja,* ***sila*** *zakonitosti gravitacije se promijenila, jer sad može djelovati na svemir s jače razine ljudske spoznajne interakcije, koja je retrospektivno nanovo definirala zakonitost univerzalne gravitacije koja sadrži neostvareni potencijal ostvarivanja namjeravanog učinka svog otkrića*.

Takva vrsta promjene bi se trebala izraziti novim veličinama nalik na tenzor kao ***diskontinuirana*** (isprekidana) promjena ukupne karakterisične zakrivljenosti mnogoznačnika fizičke ekonomije. To bi bila veličina vrste koju povezujemo s Riemannovom obradom takve promjene moći kod abelovih transcendentala.

Ta se promjena ukupne zakrivljenosti povezuje s promjenom infinitezimala ili lokalne zakrivljenosti mnogoznačnika fizičko ekonomskih procesa. Da bismo uspostavili pojam lokalne zakrivljenosti potrebno je potpuno i sveukupno odbacivanje svakog pojma apsolutnog vremena euklidske vrste. Događaji koji su vremenski odijeljeni u velikoj mjeri jednog mjerila vremena su unatoč tome istovremeni jedan s drugim glede drugačijeg mjerila. Na primjer, sukob u drevnoj Ateni između Sokrata i sofista odijeljen je od današnjeg vremena za više od dvije tisuće okretaja Zemlje oko Sunca. Unatoč tome učinci tih događaja djeluju u svemiru danas istom učinkovitosti kao i tada. Slično tome, događaji koji se još nisu dogodili a koje danas namjeravamo da se dogode, kao na primjer uspostavu uspješne ljudske naseobine na Marsu, imaju neposredni učinak na vladanje ljudskih djelatnosti na Zemlji danas. Kao posljedica toga koncepcija fizičko ekonomske lokalne zakrivljenosti mora uzeti u obzir djelatnosti kao istovremeno *i* odijeljene velikim vremeskim razmakom *i* trenutne. [30]

Ovaj ukaz na ulogu ljudske spoznaje u razvoju svemira izražava se povećanjem čovjekove moći u abiotskom, biotskom i spoznajnom području i nad njima, putem napretka znanosti i umjetnosti. Prema tome, razvoj cjelokupnosti svemira čin je rastućeg potencijala stvaralačkih moći čovjeka. Kao posljedica toga fizičko ekonomski napredak se može izraziti tim rastućim potencijalom ostvarivanja stvaralačkih ideja.

No, takve ideje se ne stvaraju u cjelokupnom svemiru nego dinamičkim odnosom svemira i suverenih, *namjernih*, stvaralačkih moći ljudskog uma pojedinca. Taj „lokalni čin" utječe na, kao što i na njega utječe, ukupni stvaralački potencijal čovječanstva a, potencijalno, i cjelokupni svemir. Sa stajališta fizičke ekonomije to se izražava fizičko ekonomskim odnosom kućanstva na cjelokupno gospodarstvo.

Primarna fizičko ekonomska djelatnost kućanstva je sposobnost ostvarivanja, *potencijala* ostvarivanja stvaralačkih ideja od članova tog kućanstva. Taj potencijal je funkcija fizičko ekonomskog okružja, to jest tvrde infrastrukture (kao što su voda, energija, prijevoz, itd.), tehničke razine, i meke infrastrukture (kao što je školovanje, kultura, zdravstvo, itd.) dostupnog članovima tog kućanstva kroz djelovanje univerzalnih zakonitosti koje iz cjelokupnog prostorvremena djeluju na taj „lokalni" trenutak.

Prema tome, ta poput tenzora veličina povezana mjerilom lokalne fizičko ekonomske zakrivljenosti mora izraziti sjecište, u točki fizičko ekonomskog mnogoznačnika, dinamičkih uzajamno djelujućih zakrivljenosti fizičkih i kulturnih zakonitosti i načela koje djeluju kroz cijelo vrijeme i utječu na, kao što i na njih utječu, stvaralačke moći pojedinaca tog kućanstva.

Moglo bi izgledati da ta veličina poput tenzora sadrži toliko mnogo članova da je njen aktualni oblik praktički nemoguće izraziti. No to je istina samo ako tražimo formalni matematički izraz. Gauss i Riemann su obojica pokazali da njihove funkcije zakrivljenosti mogu uzeti krajnje zamršene oblike kad ih se izrazi formulama. Stoga su tražili i pronašli načine kako izraziti bitne odlike u fizičko geometrijskom ruhu. Ekvivalentni načini izražavanja za te fizičko ekonomske, nalik na tenzor, veličine su fizičko ekonomske animacije koje je LaRouche razradio.

Uz zakrivljenost, metrički odnosi fizičke ekonomije mogu se isto tako izraziti veličinama poput tenzora. Najbolje je i to slikovito prikazati primjerom.

Pogledajte na razinu prijevoza raspoloživu američkim kućanstvima, koja određuje stanoviti metrički odnos između kućanstava i cjelokupnog gospodarstva izražen kao geodezijska crta u fizičko ekonomskom prostorvremenu. To se može u početku izraziti odnosom između raznih oblika brodskog, željezničkog, cestovnog, zračnog, pješačkog, biciklističkog, itd. prijevoza raspoloživog tom kućanstvu, koji određuje put najmanjeg hoda tog odnosa. No gospodarsko značenje tih oblika prijevoza je relativno prema njihovom odnosu s ustrojem cjelokupnog gospodarstva.

Da bismo to opisali, moramo razmatrati, kao što je to LaRouche predložio u svom radu ***Rebuilding the U.S.A.: Travel Among Cities*** [*Obnavljenje SADa: Putovanje kroz gradove*] od 15. prosinca 2005., razvoj prijevoza u Sjevernoj Americi od početka 17. stoljeća dalje. Fizički zemljovid Sjeverne Amerike početkom 17. stoljeća može se okarakterizirati stanovitom razinom povezanosti vezano uz zaljeve, uvale i riječne sustave istočne obale, planinski lanac Appalachian, Velika jezera i riječnim sustavom rijeka Mississippi-Misouri i Ohio. Razina povezanosti je posljedica bio-geološkog djelovanja od početka zadnjeg ledenog doba.

Ovaj fizičko ekonomski zemljovid podrazumijeva potencijalnu kontinentalnu povezanost koja se može ostvariti samo posredstvom čovjeka. Ostvarenje tog potencijala počelo je razvojem vodoputeva i sutava cesta u istočnim djelovima, a slijedili su ga prvi pokušaji izgradnje sustava koji bi povezali obalno područje s kontinentalnom unutrašnjosti, te spajanja riječnih sustava dolina rijeka Ohio i Mississippi zajedno s Velikim jezerima.

Mogućnost izvođenja tog plana ovisila je o primjeni čovjekovih stvaralačkih moći u pretvorbi bio-geološkog djelovanja, kao na primjer konstrukcija željezare Saugus u

Massachusetts Bay Colony u 17. stoljeću. Ovo integrirano proizvodno postrojenje koristilo je vodu i biološki kapacitet područja da bi preobrazilo fosilnu rudaču u alate, čavle i druge korisne stvari. Ostvarenje i primjena ovakvih „abiotskih“ proizvoda biološkim i spoznajnim djelovanjem još više su preobrazili bio-geološke odlike područja. Preobrazba je bila ishod i sastavni dio procesa koji je stvorio novu društvenu organizaciju čovjeka, to jest Američku republiku, što je dalje omogućilo i iziskivalo povećanje fizičko ekonomske povezanosti kontinenta. Ovo povećanje povezanosti, prouzrokovano uzajamnim djelovanjem (interakcijom) između abiotskih, biotskih i spoznajnih procesa, proizvelo je odgovarajuće povećanje potencijala za novo povećanje fizičko ekonomske povezanosti.

Uvođenje željeznice dramatički je promijenilo taj potencijal, ne kao zamjena za vodne puteve i ceste nago preobrazbu njihovog odnosa prema višem obliku fizičko ekonomske povezanosti. Poslije toga završio se rad na transkontinentalnoj željezničkoj mreži, razvio kontinentalni sustav autocesta i zračnog prijevoza povečavši još više fizičko ekonomsku djelatnost. Povećanje povezanosti mora se vidjeti u svjetlu odgovarajućeg porasta u energetskom snabdjevanju, pokretljivost, itd.

Nadalje, to povećanje povezanosti mora se isto tako vidjeti u sprezi s namjerom čiji je ona učinak. Na primjer, razvoj međužupanijskog (međudržavnog) sustava autocesta povezujući koncentracije malih, srednjih i velikih agro-industrijskih centara nastalih FDRovom gospodarskom mobilizacijom sredinom prošlog stoljeća, određuje određeni kvalitativni porast gospodarske povezanosti. No, kad se to uzelo kao pomoćni dodatak namjeravanih povećanja cijena nekretnina, to postaje ono što sad jest, praktički parkiralište koje se proteže od obale do obale na koje većina Amerikanaca baca milijarde radnih sati dnevno, smanjujući time fizičko ekonomsku povezanost kontinenta.

Što više, kad se na taj kontinentalni prijevozni sustav gleda kao na dio globalne mreže čiji namjeravani učinak bi trebao povećati fizičko gospodarsku povezanost čovječanstva u svrhu razvoja zemljinih kontinenata i uklapanja u razvoj sustava prijevoza povezujući te dijelove Zemlje s bliskim prostorom, Mjesecom, Marsom i dalje od toga, ostvaruje se čak i viša odlika fizičko ekonomske povezanosti uz odgovarajući učinak na gospodarski potencijal pojedinaca, članova društva u donošenju novih, stvaralačkih ideja.

Te se promjene odražavaju kao odgovarajuća promjena metričkih odnosa fizičko ekonomskog prostora i vremena koja se izražava promjenom geodezijske crte prikazujući staze najmanjeg hoda u fizičkoj ekonomiji. Ta promjena određuje vrste odlika koje se moraju izraziti putem metričkih tenzora fizičko ekonomskog prostorvremena.

Jedina prikladna mjera izražavanja takvih odnosa su veličine poput tenzora koje nadomještaju tenzore Riemannove vrste, čiji razvoj uz odgovarajući dublji smisao za fizičku i biološku znanost stoji na čelu znanstvenog poprišta danas.

.

OPASKE

1. Lyndon H. LaRouche je dopunio ovaj rad sljedećim isticanjem važnosti ovog rada:

   Treba se istaknuti odsudna različitost od uobičajenog predstavljanja tenzora s matematičko formalističkog stajališta i tenzora određenog kao fizičke koncepcije i to sa stajališta fizičke protuentropije.

   Riemannski tenzor kao fizička koncepcija ima nakanu predstaviti zakonitost protuentropijske neravnoteže, aktualnom odlikom fizičkog svemira.

   Koncepcija, dakle, Riemannskog tenzora ne kreće s matematičke formalnosti na fizičku stvarnost nego radije dodaje koncepciju fizičko protuentropijske nadgradnje nad pukim matematičkim formulama.

   Pomislite na primjer na nastanak Keplerovog sunčevog sustava, prema njegovom radu Sklad svijeta, iz osamljenog, brzo-okretajućeg Sunca. Svemir je vođen ontološkom koncepcijom univerzalne protuentropije, što eksperimentalni dokazi pokazuju. Matematička koncepcija mora postati robom svojstvenoj fizičko eksperimentalnoj stvarnosti.

   Tu leži medvjeđa stupica, čekajući da zagrize u meso matematičkog formaliste!

2. Luther Pfahler Eisenhart ***Riemannian Geometry*** , Princeton University Press, 1926.

3. Ovo je očigledno odlika svake sofisterije. Sofista laže, no nikad izravno ne izriče o čemu laže.

4. Kad se jednom ovo izrekne u ironičnom obliku, način izračuna se može razraditi. Kao što pokazuju Napierov razvoj logaritama, Leibnizov izračun broja π, ili Gaussov razvoj hipergeometrijskog niza, takav način izračunavanja mora izraziti nejasnoće svojstvene početnom ironičnom obliku. Ovo je različito od današnjih digitalnih računala, koji zamijenjuju stvarnu misao brzom iterativnom grubom silom.

5. Ovu feudalnu koncepciju svemira danas oživljuju takva popularna vjerovanja kao takozvana Kopenhaška interpretacija kvantne mehanike, ili radikalni oblici teorije informatike povezane s Wienerom, von Neumannom i drugima, koje uporno tvrde da je svemir načelno besciljan, lišen svake mogućnosti shvatljivosti od strane ljudskog uma osim statističkim opisom. To je obrazloženje jezgra slavnog dopisivanja Einsteina i Borna. Vidi: ***The Born-Einstein Letters***, Macmillian, 2005, te Bruce Director, **Riemann za protu-neznalice (odsječak) - Povodom 375. godišnjice Keplerove smrti,** Schiller-Institut-Hrvatska

6. Kepler, ***The Harmony of the World,*** p. 496**,** preveli na engleski E.J. Aiton, A.M. Duncan, J.V. Field American Philosophical Society, 1997.

7. Vidi Johann Bernoulli, ***Die Erste Integralrechnung***, 1691, preveo na njemački s latinskog Dr. Gerhard Kowalewski http://historical.library.cornell.edu/math/index.html, G.W. Leibniz, ***Two Papers on the Catenary Curve and Logarithmic Curve***, Acta Eruditorum 1691, preveo na engleski Pierre Beaudry, Fidelio Magazine, www.schillerinstitute.org, Bruce Director, ***Justice for the Catenary***, Riemann for Anti-Dummies ,Part10, ***Long Life of the Catenary***, Riemann for Anti-Dummies, Part 41

8. Vidi LaRouche, ***Principle of Powers, Box 12***, Executive Intelligence Review, 23. prosinca, 2005, www.larouchepub.com

9. Vidi Boston LYM pedagogy on catenary.

10. Leibniz je dokazao da je to aritmetička sredina dviju eksponencijalnih funkcija, činjenica s ogromnim matafizičkim dubljim smislom. (Leibniz, navedeno djelo.)

11. Gauss, Carl, ***Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas,*** 1828, Gauss ***Werke*** Vol. IV

12. U astronomiji i geodeziji, okomica je visak a kugla je nebeski svod.

13. Okomica, okomita na površinu plohe proteže se u prostor van plohe.

14. Gaussovo istraživanje svojstava najkraćih crta ide unatrag do nekih od njegovih najranijih razmišljanja o bezumlju euklidske geometrije. Jedna od najranijih bilješki u njegovom dnevniku je opaska o euklidskoj definiciji ravnine. Za Gaussa odlike ravne plohe i crte ne mogu se odrediti *a priori*, nego samo kao posljedica fizičkih odlika (zakrivljenosti) plohe.

15. Sličan odnos postoji za svaki višekutnik.

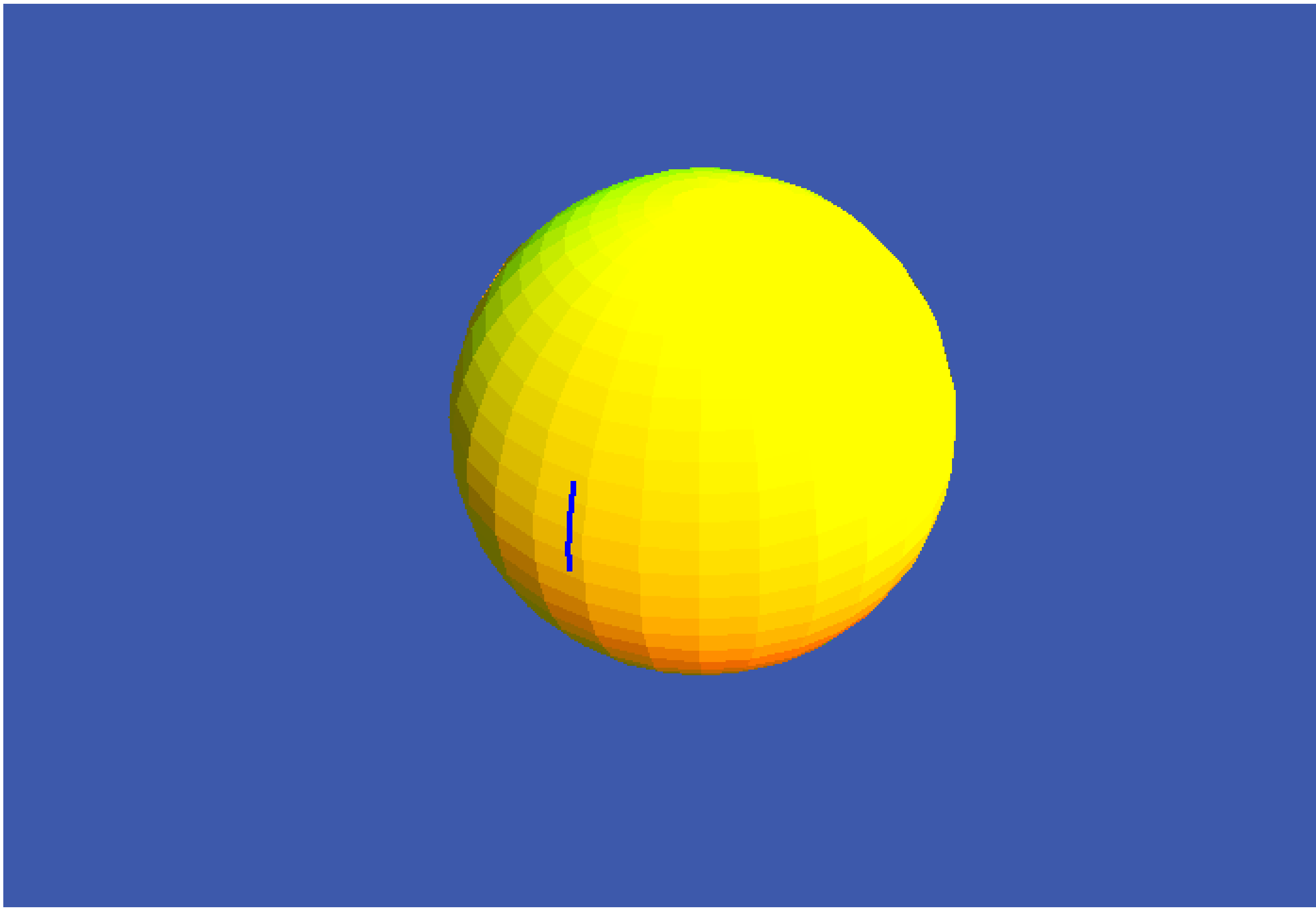
16. Vidi LaRouche, ***Principle of Power box 5***, Op. Cit.

17. Vidi Bruce Director, ***Archytas From the Standpoint of Cusa, Gauss and Riemann,*** Riemann for Anti-Dummies, Part 42

18. Kod primjera trostruko proširenog mnogoznačnika postojale bi tri plohe koje se sjeku u jednoj točki.

19. Tuillio Levi-Civita, koji je bio student Gregorio Riccija, koji je sa svoje strane bio student Riemannovig suradnika Enrica Bettija, iznio je kasnije drugi, jednostavniji način pronalaženja zakrivljenosti elementa plohe mjereći promjenu u smjeru vektora koja nastaje kad se taj vektor pomiče oko male površine, tako da uvijek ostaje paralelan samom sebi. Intuitivno izgledalo bi da takav čin ne bi prouzrokovao promjenu u smjeru vektora. Na ravnoj plohi to je istina. No ako ploha ima bilo kakvu zakrivljenost sama zakrivljenost prouzrokovat će promjenu smjera. (Vidi prikaz 9.)

Tenzor-animacija:\prikaz 09



20. Važno je zapaziti da jedna ta komponenta izražava dinamički odnos dvaju parametara koji određuju plohu.

21. Gauss je to obilježio E, F, i G.

22. Te funkcije su proširenje Gaussovih funkcija E, F, i G za plohe.

23. Riemann, Bernhard, ***Mathematische Werke***. Berlin 1990, p. 435. Prijevod Kolmogorova, Juškeviča, ***Matematika 19. stoljeća***, preveo Roger Cooke, Birkhauser Verlag, Berlin, 1996, str. 85.

24. Vidi Bruce Director, ***View from the Top,*** Riemann for Anti-Dummies, Part 67

25. Vidi B., Riemann, ***Beitrage zur Theorie der durch die Gauss'sche Riehe...; Theorie der Abel'schen Functionen; Ueber die Flache vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung,*** Riemann's ***Mathematische Werke***, Leipzig, 1892.

26. Vidi Hal Vaughn, ***Archimedean Polyhedra and the Boundary: The Missing Link***, [Arhimedovi poliedri i granično područje, Karika koja nedostaje], Twenty-First Century Science and Technology, ljeto 2005.

27. Vidi B. Riemann, navedeno djelo; Bruce Director, ***Riemann for Anti-Dummies Parts 52, 54, 61, 64.***

28. Vidi LaRouche, ***Vernadsky and Dirichlet's Principle*** and Bruce Director, ***Bernhard Riemann's Dirichlet's Principle***, Riemann for Anti-Dummies Part 58

29. Vidi Carl Gauss, ***Nachlass zur Theorie Des Arithmetishc-Geometrischen Mittels und der Modulfunktion***, uebersetzt und herausgegeben von Dr. Harald Geppert, Ostwaldt's Klassiker der Exakten Wissenschaften, Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H. Leipzig, 1927; Bruce Director, ***Gauss's Arithmetic-Geometric Mean: A Matter of Precise Ambiguity***, Riemann for Anti-Dummies, Part 66

30. Paradigma takvog pojma vremena je Keplerov pojam vremena u vezi s planetarnim putanjama. Djelovanje planeta u svakom trenutku je poznato samo glede njegovog odnosa prema cijeloj putanji. Keplerov zakon jednakih površina izraz je takvog pojma vremena.