PEDAGOŠKI URADAK

Razmišljajte infinitezimalno!

[Opaska: Zainteresirani mogu zatražiti animirane prikaze navedene u ovom opisu preko navedene adrese za elektronsku poštu Schillerovog Instituta]

«Vrlo dobro se zna da znanstvena fizika postoji tek nakon izuma diferencijalnog računa,» rekao je Bernhard Riemann u uvodu svojih predavanja pred kraj 1854. godine koja su posthumno objavljena pod nazivom 'Parcijalne diferencijalne jednadžbe i njihova primjena na fizičke probleme'. Za većinu Riemannovih slušateljata izjava je bila lako shvatljiva jer su razumjeli fizikalno značenje Leibnizovog diferencijalnog računa koje se polako širilo u prethodnih 150 godina kroz radove Kästnera i Gaussa. Sasvim različite prilike vladaju danas jer većina današnjih čitatelja, čijim je obrazovanjem prevladavao empirizam mrzitelja Leibnitza—Eulera, Cauchyja i Russella. Dok bi takvim žrtvama formalni sadržaj Riemannove izjave bio prihvatljiv, njena prava nakana bila bi im nerazgovijetna kao Ivanovo evanđelje i Pavlove poslanice zadrtim vjerskim fanaticima.

Empiričar ne će shvatiti Riemannovu izjavu iz jednostavnog razloga jer on povezuje riječi 'diferencijalni račun' sa sasvim različitom idejom od one na koju su Leibniz i Riemann mislili. Za žrtvu današnjeg sustava obrazovanja kojim prevladavaju empiričari infinitezimalni račun predstavlja samo sklop pravila matematičkog formalizma. No znanstveniku infinitezimalni račun je kao Sokratski dijalog kroz koji čovjek nadvladava ograničenosti zapažanja osjetilima i otkriva univerzalne zakonitosti koje vladaju svim fizičkim djelovanjima.

Empiričar odbacuje Leibnizove zamisli jer prihvaća Aristotelovu doktrinu da se «fizika bavi samo predmetima osjetila», dok Platon, Kuza [Nikola Kuzanski], Leibniz i Rieman ističu da se fizika bavi predmetima **misli**. Ti misaoni predmeti, ili 'Geistesmassen' kako ih Riemann naziva, odnose se na univerzalna načela koja **prouzrokuju** ponašanje predmeta osjetila na način kako ih mi zapažamo (osjetilima). Budući nisu izravno pristupačna osjetilima takva načela izgledaju kao da dolaze 'izvan' vidljivog svijeta. Međutim pravi se velika grješka ako iz toga zaključimo, kao što to sofisti rade, da ta načela dolaze izvan samog svemira. Ustvari, te zakonitosti koje su univerzalne, djeluju svugdje i u svako vrijeme pa i u svakom 'infinitezimalnom' intervalu djelovanja, dodirujući predmete osjetila kao tangente u vidljivoj domeni.

Leibnizov diferencijalni račun smišljen je upravo da bi izrazio odnos između vidljivog kretanja predmeta osjetila i djelovanja univerzalnih zakonitosti svugdje na njih. Pomoću njega univerzalno načelo sastojeći se od vidljivog i nevidljivog obvijeno je u jedinstvenu misao pokazujući nam ono što znamo i ukazujući na ono što još trebamo otkriti. Znanstvenik koji okrene leđa pod Aristotelovim, Sarpijevim ili Russellovim utjecajem ponaša se kao da mu je razum prestao postojati, što se ustvari dogodi.

Baš kao što je Riemann točno ustvrdio da je znanstvena fizika počela izumom diferencijalnog računa, moglo bi se s pravom reći da je diferencijalni račun počeo s Kuzinom ekskomuniciranjem Aristotela iz znanosti. Makar je istinito da su neke metode Leibnizovog računa započele svoj razvoj u radu Arhite i Arhimeda, taj se razvoj zaustavio kad su Aristotelove doktrine prevladale u europskoj kulturi nakon umorstva Arhimeda od Rimljana. Kuza je preokrenuo tu katastrofu i preusmjerio europsku znanost od te opsesije predmetima osjetila natrag na Pitagorino i Sokratovsko težište na ideje.

Kuza je inzistirao da percepciju ne uzrokuju osjetilne stvari nego stvari su osjetilne jer um posjeduje moć osjetiti. Um sa svoje strane ima sposobnost osjetiti zato jer posjeduje još više svojstvo racionalnosti pa je sposoban racionalizirati jer posjeduje još jedno više svojstvo razuma, intelekta što mu daje sposobnost razumnog objašnjenja [sposobnost intelektualiziranja] jer je čovjek stvoren na infinitezimalnu sliku Božju.

S tog stajališta Kuza je odbacio Aristotelov sofizam da manje promjene znače veće savršenstvo, što Boga čini tiranskom silom koja svijet održava savršenim odupirući se promjeni. Umjesto toga Kuza je raspoznao da sposobnost promjene u fizičkom svemiru i u ljudskom umu ukazuje na mogućnost njihova usavršenja te da je Božja nakana usavršiti svoj stvoreni Svijet kroz spoznajnu moć Čovjeka. Stoga moć uma zapaziti, percipirati promjene a ne predmete određuje odnos Čovjeka prema fizičkom svijetu i povećava njegovo znanje o svemiru i njegovu moć u njemu.

Oslobodivši znanost omogućivši joj raspoznati promjenu kao prvenstvenu Kuza je zaključio da svako fizičko djelovanje mora biti nejednolično, a to je Kepler eksperimentalno potvrdio svojim otkrićem da univerzalna gravitacija prouzrokuje harmonički odnos eliptičkih putanja planeta. Kao što je Kepler inzistirao vidljivo promjenjivo kretanje planeta u svojoj putanji radije nego očito odstupanje od Aristotelove iluzorne ideja o nepromjenjivoj savršenosti ustvari je namjerna posljedica zakonitosti univerzalne gravitacije koja djeluje univerzalno, no čije posljedice se razlikuju u svakom infinitezimalno malom intervalu djelovanja. Glede toga Kepler je usporedio zakonitost univerzalne gravitacije s idejom (koristeći latinsku riječ *species* u njenom opisu) no razlikovao ju je od ljudske ideje jer joj nedostaje svojstvo svojevoljnosti jedinstveno ljudskoj spoznaji. Kepler je razumio da čovjek može shvatiti tu ideju, stvorivši zamisao (misaoni predmet) koji izražava fizičko djelovanje kao posljedicu univerzalne nakane, jednako kao što je, kako je Kuza isticao, ljudsko djelovanje posljedica ljudske nakane. Iako je Kepler ostvario značajan napredak u ostvarenju geometrijskih izraza odnosa on je prepoznao potrebu novog oblika metafore i zatražio je od budućih pokoljenja nastavak napretka u tom cilju.

A Leibniz je definirao traženu zamisao na koju je Riemann mislio kad je govorio o početku znanstvene fizike. Leibniz je shvatio potrebu novog oblika matematičkog izraza koji bi odražavao odnos između univerzalne zakonitosti i njenog stalno mijenjajućeg učinka na vidljivo kretanje. A što je najvažnije taj novi izraz mora funkcionirati i u obratnom smjeru, jer se baš s tim načinom susrećemo u znanstvenom istraživanju. Naime, iako se posljedice zakonitosti vide kroz gibanje, puko opisivanje vidljivog ne govori ništa o samoj zakonitosti. Da bi se znao uzrok gibanja u znanstvenom smislu neophodno je izraziti gibanje kao učinak zakonitosti.

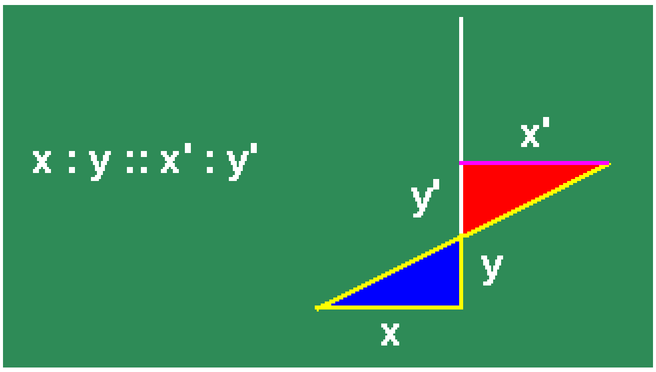
Da bismo shvatili tu misao Leibniz se koristio oblikom istraživanja kojeg je ranije razvio Kuza, a taj je odnos maksimuma i minimuma. Kao što je Kuza specificirao maksimum i minimum poklapaju se u Bogu, ali u stvorenom svijetu maksimum i minimum se javljaju kao suprotnost. Stoga da bismo znali neki fizički proces potrebno je imati zamisao kojom se može prepoznati oprečne krajnosti tog fizičkog procesa kao maksimalne i minimalne učinke jedinstvene, sjedinjene nakane. Na primjer, u svakom intervalu eliptičke putanje gibanje planete je različito na dvijema krajnjim točkama tog intervala bez obzira kako je malen taj interval. No postoje dvije iznimke. Jedna je čitava putanja a druga je trenutak same promjene, koji sadrže u sebi maksimalni i minimalni učinak univerzalne gravitacije na planetu. Kod minimuma učinak univerzalne zakonitosti je uvijek različit ali se razlikuje sljedeći točno određenu zakonitost. Matematički izraz te različnosti Leibniz je nazvao 'diferencijal' koji uvijek postoji integriran u cjelinu djelovanja. U potonjem obliku taj matematički izraz Leibniz je zvao 'integral'.

Iz tog odnosa Leibniz je izumio vrstu animacije koju je zvao 'diferencijalne jednadžbe' u kojima je maksimalni učinak izražen kao funkcija minimuma. Kao što je Riemann zapazio to je znanost postavilo na sasvim novo postolje jer kod eksperimentalnih istraživanja izraz minimuma je ono što se mjeri iz čega onda treba odrediti maksimum, kao na primjer u slučaju Leibnizovog i Bernoullijevog određivanja krivulje lanca, Gaussovog određivanja putanje Ceresa ili Gaussovih i Riemannovih istraživanja u geodeziji, geomagnetizmu, elektromagnetizmu i istraživanja udarnih valova. Pomoću Leibnizovog diferencijalnog računa takva istraživanja su se mogla po prvi put poduzeti neophodnom epistemološkom strogošću.

Leibnizove diferencijalne jednadžbe, naravno, ne izražavaju zakonitost izravno. No one mogu izraziti mijenjajući učinak zakonitosti u svakom trenutku. Na temelju toga zakonitost možemo znati putem inverzije kao zamisao koja prouzrokuje učinak koji je izražen diferencijalnom jednadžbom. Da bismo istaknuli taj pojam možemo reći: 'diferencijalna jednadžba nije sama zakonitost ali izražava stalno mijenjajuće tragove koje ta zakonitost ostavlja u vidljivoj domeni. Iako je ovaj opis, odjeven u riječi ili geometriju neophodno ironičan, misaoni predmet na koji se odnosi je prepoznatljiv umom s absolutnom preciznošću.

Od odsudne važnosti je istaknuti da je Leibnizov diferencijalni račun matematički izraz fizičke zamisli, ideje. Kao što je bjelodano što se tiče fizičkog djelovanja diferencijal i integral su izraz minimalnog i maksimalnog učinka istog univerzalnog fizičkog načela (zakonitosti). A ipak, empiričari su napadali Leibnizov diferencijalni račun apstrahirajući ga iz fizike i prikazujući ga samo u vidu matematičkog formalizma. Proizveli su putem izvrtanja činjenica (sofizma) očiti matematički paradoks postupajući s oba ta područja kao da postoje odvojeno od fizičke zakonitosti koju izražavaju. S tog formalnog matematičkog stajališta sofist obrazlaže da diferencijal ne postoji, jer su u trenutku promjene proteklo vrijeme i prevaljena udaljenost oba formalno nula. Iz toga proizlazi, nastavlja sofist, da se integral ne može izraziti jer je on zbroj beskonačno mnogo nultih veličina.

Leibniz se tom sofizmu uvijek suprotstavio inzistirajući na fizičkoj naravi svog infinitezimalnog računa. U svom pismu Varignonu 1702. godine postavio je sljedeći paradoks tvrdokornim pobornicima algebre:



Konstrurajte dva slična trokuta u sjecištu dvaju pravaca (vidi prikaz). U prikazu krakovi jednog (većeg-crvenog) trokuta su u istom razmjeru jednog prema drugom kao i krakovi drugog trokuta. Sad, počnite micati kosi pravac u jednom smjeru (recimo gore) paralelno njegovom početnom položaju. Kod tog gibanja jedan će trokut (desni) bivati sve manji dok će drugi rasti ali će proporcionalnost njihovih stranica ostati ista. U jednom trenutku gibanja manji će trokut proći kroz točku sjecišta dviju početnih pravaca i u sljedećem se pojaviti na drugoj strani sjecišta i početi ponovno rasti – vidi animirani prikaz 'Figure 2'.

Pobornici algebre uporno su tvrdili da u trenutku prolaza malog trokuta kroz točku njegove stranice su naizgled nula pa je nemoguće izraziti njihov omjer ili, još apsurdnije, njihov omjer se izgubi (prestaje postojati) u tom trenutku. Leibniz je na to uzvratio da je prolaz trokuta kroz točku posljedica fizičkog kretanja čije je svojstvo održavanje proporcionalnosti stranica trokuta. Stoga neprekidna proporcionalnost je proizvod kretanja, njegov namjeravani učinak. U trenutku prolaska malog trokuta kroz točku kretanje nije prestalo i stoga nije ni proporcionalnost dvaju trokuta. Proporcionalnost je odraz zakonitosti fizičkog djelovanja (hoda) koju um prepoznaje i koju drži u glavi kao misaoni predmet u sprezi sa stanovitom nakanom. Točka je samo trenutak gibanja. Ona ne postoji van fizičkog djelovanja. Tek kad se matematički izraz odijeli od fizičkog djelovanja javlja se algebarsko proturječje. Pojava takvog proturječja mogla bi naznačiti problem u razmišljanju empiričara, no problem leži samo tamo ali ne i u samom svemiru.

U suprotnosti s time tvrditi da algebarsko proturječje ima ontološko značenje proizvodi stanje razdvojenosti (disocijacije) u umu znanstvenika. To je upravo i bila nakana Eulera, Lagrangea i naročito Cauchyja, koji je zamijenio Leibnizovu ideju infinitezimalnog sa svojom idejom limesa (graničnog slučaja). Cauchy je tvrdio da limes uklanja algebarsko proturječje infinitezimalnog. No vršeći to Cauchy je ustvari ubacio bezumnost uklonivši spregu uma s fizičkim svemirom u kojem živi. To je, naravno, i bila njegova nakana.

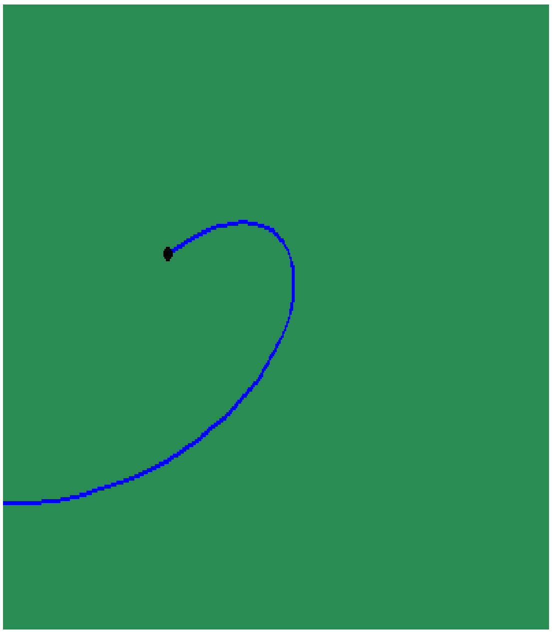
A da je spoznajna sposobnost bila prava meta oligarskog napada na Leibnizov diferencijalni račun može se vidjeti iz ispovijesti Richarda Couranta i Herberta Robbinsa namijenjenoj popularnom čitateljstvu u njihovoj knjizi na engleskom *What Is Mathematics (Što je matematika)* iz 1941. godine:

> «...baš sami temelji diferencijalnog računa bili su kroz dugo vremena mutni zbog nevoljkosti da se prizna isključivo pravo zamisli limesa kao izvora novih metoda. Ni Newton ni Leibniz nisu se mogli staviti u stanje prihvaćanja takvog oštro naznačenog stava, iako nam to sad izgleda jednostavno nakon što je zamisao limesa u potpunosti pojašnjena. Njihov primjer prevladavao je kroz više od stoljeća matematičkog razvoja tijekom kojeg je ta tema bila obvijena velom razgovora o 'beskonačno malim veličinama', diferencijalima', 'konačnim omjerima' itd. **Odugovlačenje kojim su te zamisli bile konačno napuštene imalo je duboke korijene u filozofskom stavu tog vremena te u samoj naravi ljudskog uma»** [isticanje teksta nije u originalu, istaknuo ga je autor uradka].

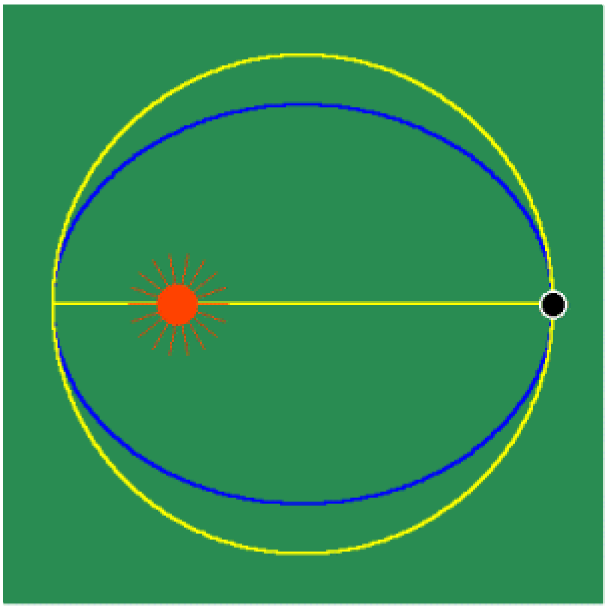
Empiričar vidi predmete u kretanju i zamišlja ih kako se kreću u prostoru koji je prazan baš kao što vjeruje da mu je i glava prazna. Znanstvenik zamišlja višeznačnik (višestruki sklop) univerzalnih fizičkih zakonitosti, koje ih obuhvaćaju kao oživotvorene predmete misli a one pak predmetima pred njegovim očima nadahnjuju život. Promjena je prvom smetajuća neugodnost koja razbija njegove u konačnici jalove pokušaje očuvanja prihvaćenih aksiomatsko formalnih struktura. A potonjem, promjena je sretna naznaka učinaka nastalih kao posljedica univerzalnih zakonitosti kretanja koje djeluju *univerzalno no različito* u svim infinitezimalnim razmacima vremena i prostora.

- Oživotvoreni diferencijalni račun -

Pedagoški najučinkovitiji način rasvjetljavanja Leibnizove zamisli diferencijalnog računa je putem niza

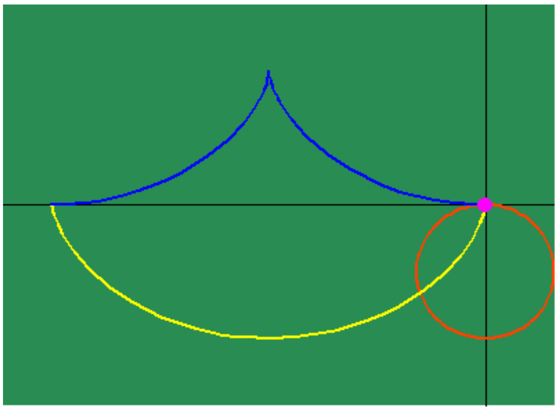


animiranih slika koje osvjetljuju njihovu primjenu od Keplera do Huygensa, do Leibniza, do Gaussa, do Riemanna. U sljedećim odlomcima oslonit ćemo se na animirane prikaze kao glavne govornike dok će pisana riječ pružiti samo najgrublju scensku režiju.



Animirani prikaz 3: Keplerova zakonitost jednakih površina. Kepler je zamislio orbitalno gibanje kao promjenljivu posljedicu zakonitosti univerzalne gravitacije, koja se mijenja obrnuto proporcionalno s razmakom između sunca i planete. Kepler je razaznao da je gibanje u svakom intervalu zbroj beskonačno mnogo promjenljivih radijalnih razdaljina unutar tog intervala, koji odražava gibanje planete u svakom času. Nije mogao taj zbroj točno izračunati no shvatio je da rezultat odgovara opisanoj površini (vidi animirani prikaz 'Figure 3a'], a on ju je mjerio svojom poznatom metodom triju anomalija (vidi animirani prikaz 3b). Keplerova metoda računanja dovela je do paradoksa koji je nagnao Leibniza na razvoj svoje koncepcije diferencijala i integrala.

Animirani prikaz 4: Huygens je pokušao savladati problem nejednolikog



kretanja tako da izrazi jedno nejednoliko gibanje kao funkciju drugog, metodom involute i evolute. Kod animiranog prikaza 4a žuta krivulja nastaje kretanjem i razmatanjem bijelog konopca od plave krivulje. Žuta se krivulja zove involuta. Plava krivulja je evoluta. Prema tome promjenljiva zakrivljenost involute funkcija je promjenjive zakrivljenosti evolute. Bijeli konopac je uvijek okomit na involutu i uvijek tangencijalan na evolutu. Zbog toga involuta je uvijek omotnica kružnica čija sva središta leže na evoluti (vidi animirane prikaze 4b, 4c). Drugim riječima te kružnice su svugdje tangencijalne na evolutu. Prema tome zakrivljenost involute izražava učinke zakonitosti koje djeluju tangencijalno na evolutu i obratno.

No, umjesto razmišljanja o tim dodirivajućim kružnicama nastalim iz krivulja pomislimo na krivulje nastale dodirujućim djelovanjem kružnice čija veličina i položaj se mijenjaju u skladu sa zakonitosti kretanja (vidi animirajući prikaz 4d). Na taj način krivulje se može ispravnije razumijeti kao namjeravani učinak zakonitosti promjene koja djeluje svuda tangencijalno na svoj vidljivi izražaj.

Huyghens je upotrijebio tu spregu da bi sagradio svoj poznati sat s klatnom na zakonitosti cikloide koja ima svojstvo da je njena involuta opet cikloida kao i da je ona krivulja jednakog vremena tijela koje pada po zakonu sile teže (vidi animirane prikaze 4e, 4f, 4g, 4h).

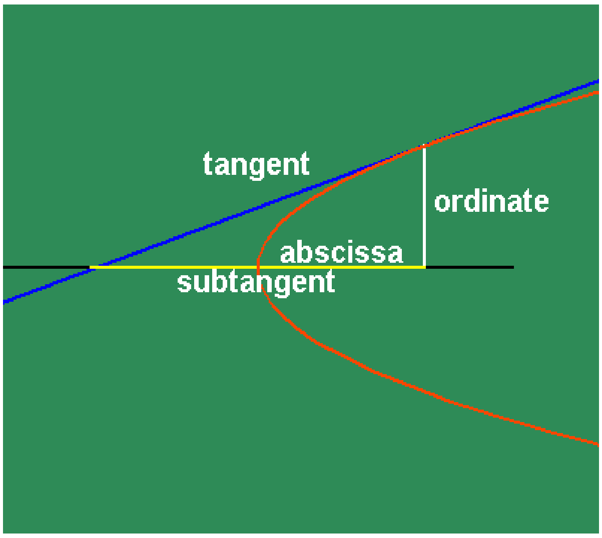
Animirani prikaz 5: Dok Huygensova metoda involute i evolute daje izraz nejednolikom gibanju ona se zasniva na sasvim mehaničkoj proceduri umjesto da izravno daje izraz zakonitosti promjene. Leibniz je riješio taj problem dajući izraz toj zakonitosti promijene putem diferencijalnih jednadžbi. Da bi izmjerio diferencijal Leibniz je preslikao promjenjivo djelovanja u infinitezimalno malom u vidljivo područje na način sličan Platonovoj metafori pećine†. U tu svrhu Leibniz je poopćio istraživanja Fermata definirajući niz funkcija koje ovise o promjenljivoj zakrivljenosti koja nastaje fizičkim djelovanjem. (Vidi prikaz 5a). Leibniz je napose proučavao gibanje subtangente ['subtangent' u prikazu] čija je duljina funkcija smjera tangente ['tangent'], a koja je sa svoje strane funkcija promjene zakrivljenosti. Leibniz je razmatrao trokut oblikovan točkom tangencije, sjecištem ordinate ['ordinate'] tangente i horizontalne osi i sjecištem tangente i osi te mu je taj trokut bio kao preslika u vidljivoj domeni promjenljivog djelovanja u infinitezimalno malom.

Da bismo intuitivno shvatili ovu metodu uzmimo primjer parabole (vidi animirani prikaz 5b), koji pojašnjava promjene gibanja subtangente parabole. Fermat je pokazao da je subtangenta parabole uvijek jednaka dvostrukoj dužini abscise od vrha parabole. Gledano s tog stajališta parabolu se može uvijek u cijelome odrediti u vidu djelovanja zakonitosti gibanja. Umjesto gledanja na subtangentu kao funkciju parabole trebamo misliti na djelovanje parabole kao funkciju subtangente koju vrh parabole uvijek dijeli na polovinu, a vrh je točka gdje je

† Platonova alegorija našeg zapažanja svijeta gdje u pećini leđima okrenuti plamenu van pećine gledamo sjenu koju plamen van pećine (stvarni svijet) baca na hrapavu površinu stijenke u pećini (vidljivi svijet).

subtangenta u svom minimumu. Ovakav način razmišljanja je elementarni, pedagoški opis 'diferencijalne jednadžbe'.

S tog stanovišta Leibniz je bio u mogućnosti otkriti postojanje fizičkih zakonitosti koje se nije moglo izraziti u vidljivom obliku kretanja no **moglo ih se** izraziti pomoću svojstva diferencijalnih jednadžbi. Na primjer vidljivi oblik eksponencijalne krivulje se može definirati kao krivulju koju proizvodi neprekinuto gibanje koje je aritmetičko u jednom smjeru a geometričko u okomitom smjeru (vidi prikaz



5c). No ipak to gibanje ima jedinstveno svojstvo, koje je Leibniz pronašao kroz svoj infinitezimalni račun. Eksponencijalna krivulja je krivulja čija je subtangenta uvijek konstantna (vidi prikaz 5d). Drugim riječima eksponencijalna krivulja je krivulja sa svojstvom promjene koje je istovjetno sebi!

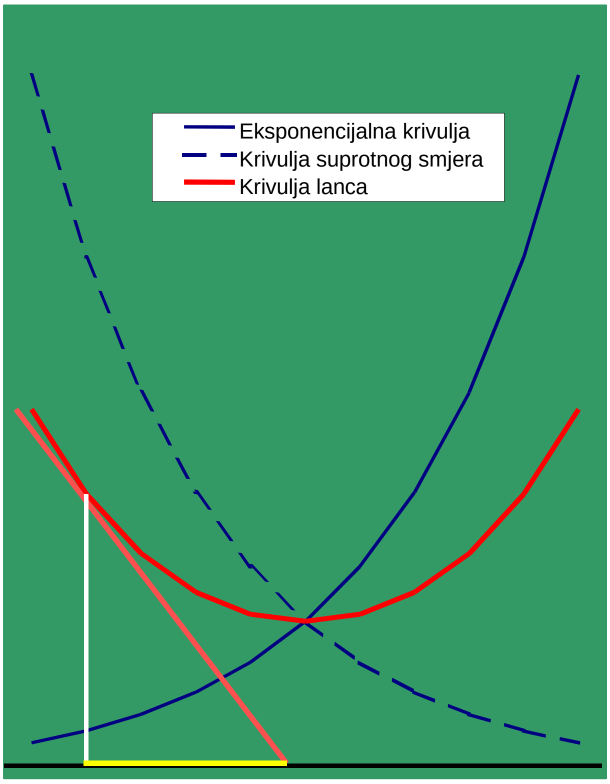
Ovaj pronalazak ističe odsudnu razliku Leibnizove metode od Huygensove. Glede involute i evolute, cikloida je krivulja čije promjene su jednake samoj krivulji. No kod općenitije Leibnizove metode eksponencijalna krivulja predočuje svojstvo sebi-sličnosti. Važnost ove različitosti dobro se vidi u Leibnizovom otkriću odnosa eksponencijalne krivulje s krivuljom lanca, koja ističe činjenicu krivulje lanca kao općenitijeg izraza zakonitosti najmanjeg hoda od cikloide.

Kao ishod ovog istraživanja Leibniz je otkrio potpuno novu vrstu transcendentalne funkcije. Shvatio je da iako svaka eksponencijalna krivulja ima konstantnu subtangentu, apsolutna veličina varira s konstantom proporcionalnosti. Leibniz je pronašao postojanje novog broja, koji je on nazvao «b», koji oblikuje eksponencijalnu krivulju čija je subtangenta jednaka jedinici. (Euler je kasnije promijenio ime broja u «e», pa broj još uvijek nosi taj povijesno iskrivljeni i u neku ruku bogohulni moniker.

Tom novom mogućnosti istraživanja fizičkih radnji kao djelovanja zakonitosti promjene nova svojstva su isplivala na površinu koja bi inače ostala skrivena. Na primjer kod istraživanja naizgled jednolikog kružnog gibanja sa stajališta promjena subtangente kružnice javljaju se dva prekida, koja inače nisu vidljiva. To su točke gdje subtangenta postaje beskonačna a to odgovara Gaussovoj zamisli $\sqrt{-1}$ i -$\sqrt{-1}$ (vidi prikaz 5f).

Slično tome kod istraživanja promjenljive subtangente krivulje lanca javlja se prekid u najnižoj točki krivulje, čije se značenje jasnije može rasvijetliti, kad se zapazi da je to točka sjecišta dviju eksponencijalnih krivulja suprotnih smjerova, iz kojih se dobiva krivulja lanca (vidi prikaz). U drugim sličnim pedagoškim obradama pravo svjetlo dubljeg smisla krivulje lanca sjaji tek u kompleksnoj domeni.

Iz ovih primjera možemo vidjeti nastanak novih zakonitosti kad fizičke krivulje shvatimo kao učinke zakonitosti promjene. U



oba slučaja kružnice i krivulje lanca krivulje su svugdje neprekinute i glatke no pre-kid postoji u zakonitosti promjene. Unatoč tome krivulja ne prestaje postojati u tim točka-ma kao ni zako-nitost promjene. Zapravo nagla poja-va tih prekida signalizira nam posto-janje i djelovanje nove, neotkrivene zakonitosti.

Leibniz je prepoznao postojanje te nove zakonitosti i ukazao gdje bi je trebalo tražiti ali tek su Gauss i kasnije Riemann otkrili da se njen izraz nalazi u kompleksnoj domeni, što će sljedeći uradak razraditi.