

# Riemann za protu-neznalice (odsječak)

## Povodom 375. godišnjice Keplerove smrti

Bruce Director, 16. studenog 2005.

"U nemirnom i nesigurnom dobu kao našem, kad je teško radovati se čovječanstvu i smjeru toka ljudskih poslova, naročito je utješno razmišljati o vedroj veličini jednog Keplera. Kepler je živio u doba u kojem vladavina zakonitosti u prirodi nije nipošto bila prihvatljiva izvjesnost. Kako je morala biti velika njegova vjera u nepromjenjiv zakon, koja mu je davala snage posvetiti deset godina mukotrpnog i strpljivog rada na empirijskom istraživanju gibanja planeta i matematičkim zakonima tog gibanja, samo svojim vlastitim snagama, bez ičije podrške i shvaćanja nekolicine! Da bismo dostojno odali počast uspomeni na njega moramo imati što jasniju sliku njegovog problema i etapa njegovog rješenja."

To su bile riječi Alberta Einsteina objavljene u novinama Frankfurter Allgemeine Zeitung, 9. studenog 1930., prigodom proslave 300. godišnjice Keplerove smrti. Sad, 75 godina kasnije te riječi još uvijek odzvanjaju istinom i daju prigodno stajalište s kojeg možemo ispitati problem relevantan danas kao što je i onda bio, a to je sprega između epistemologije i općih uvjeta čovječanstva. Tu dolazi i ironični dobitak iz istraživanja te sprege sa Einsteinovog gledanja na Keplera. Iako je Einstein raspoznao važnost sprege između stanja znanosti i stanja društva, propustio je shvatiti njen dublji **epistemološki** smisao kao što je to Kepler shvatio. Ipak problemi s kojima se Einstein sučelio ustrajali su neriješeni do današnjeg dana. Stoga, gledajući na Keplera Einsteinovim očima, kao i Einsteina Keplerovim, možemo primijeniti Keplerov pristup problemu kojeg je Einstein naznačio.

U studenom 1930. svijet je doista bio "nemirno i nesigurno doba" kao što je Einstein napomenuo. Globalna depresija bivala je sve dublja, dok su međunarodni sinarhistički financijeri sa sjedištem u Londonu ubrzano radili na konsolidaciji fašističke kontrole nad vladama Europe i Japana s nakanom udara na Sjedinjene

Države i uspostave globalnog, neo-feudalnog fašističkog svjetskog carstva. Kao što je Lyndon H. LaRouche razradio u mnogim radovima, najnovje u radu **Globalizam je novi imperijalizam**, ova kriza imala je korjene u britanskoj, imperijalističkoj reakciji na poraz svojih marionetskih Konfederativnih Država Amerike i naknadnom proširenju 'Američkog sustava' [političke ekonomije] na kontinentalnu Europu i značajan dio Azije uz pomoć saveznika Abrahama Lincolna. Usvojivši strategiju sličnu onoj koju su koristili njihovi drevni babilonski i perzijski preci nakon neuspjeha da vojno poraze Atenu i njene saveznike u 5. stoljeću prije Krista, imperijalisti s britanskim sjedištem prebacili su se s prvenstveno vojne strategije uništenja Američkog sustava na nastojanja potkopavanja kulturne prevlasti znanstvenih zakonitosti na kojima se taj sustav zasnivao.

Ti naponi imali su najveći učinak na Europu. Nakon Američke revolucije i kao njena posljedica Britanci su orkestrirali Jakobinsku revoluciju, Napoleonske diktature i Bečki kongres 1815. što je izazvalo val prisilnog kulturnog pesimizma s nakanom demoraliziranja američkih saveznika Europe i razaranja optimizma nastalog zbog uspjeha Američke borbe. Preporodom reformi u duhu Američkog sustava na europskom kontinentu u drugoj polovici 19. stoljeća oligarhija je ubrzala širenje kulturnog pesimizma, što se dobro može vidjeti u sve većem popularnom prihvaćanju takvih umno umrtvljujućih pokreta kao egzistencijalizam Friedricha Nietzschea i Richard Wagnerovih kulturnih opera.

Iako je Einstein nepopustljivo odbijao uvođenje takvog radikalnog pozitivizma u znanost, on je postao i bio politička meta liberalno-imperijalističkog krila tih sinarhista sa sjedištem u Londonu. Igrajući na kartu njegove političke naivnosti i zbog njegove ranjivosti na kulturni pesimizam nastojali su, katkad uspješno katkad ne, manipulirati politički naivnim Einsteinom u

svoje svrhe. Zbog toga Einstein je bio zbunjen glede pravog uzroka globalnog nemira kojeg je spomenuo i smušen glede njegova rješenja. Unatoč tome, raspoznao je da se degeneracija društva kojoj je bio svjedokom podudarala sa sličnom degeneracijom u znanosti, o kojoj je imao jasniju premda nepotpunu predodžbu.

Nije čudo da će Einstein naći srodnu dušu u Kepleru, čije je shvaćanje problema s kojima se znanost i društvo suočavaju bilo mnogo dublje nego njegovo vlastito. U Keplerovo vrijeme nerazumnost je isto tako prevladavala europskim društvom unatoč ranijoj višoj razini zdravog razuma koja je započela nastojanjima krugova povezanih s Nikolom Kuzanskim gotovo dva stoljeća ranije. U to vrijeme ti humanisti prigrabili su priliku koju im je pružio raspad feudalističkih bankarskih kuća Bardija i Peruzzija, da postave Sokratsku predodžbu čovjeka kao zakonitost za društvo. Kuza je čvrsto zagovarao, kao Sokrat i Platon, da je spoznaja, premda jedinstvena ljudskom biću kad poprima oblik pune svijesti svog postojanja, odraz općenite odlike samog Svemira. Prema tome, oprečno aristotelovskoj dogmi koja je prevladavala Europom nakon propasti grčkog društva u stoljećima nakon Peloponeskih ratova, Kuza je shvatio, kao Sokrat i Platon, **da materijalni svemir nije ravnodušan naspram ljudske misli već da je čovjek, putem svoje moći otkrivanja univerzalnih fizičkih zakonitosti, sastavni dio Svemira kao cjeline.**

Kuza je otišao još dalje, navodeći da se ustroj ljudskog poslovanja mora zasnivati na raspoznavanju uloge ljudskog uma u fizičkom svijetu. Njegovi krugovi uspjeli su uspostaviti uporište u društvu, a primjeri se vide u dostignućima u znanosti i umjetnosti Brunelleschija, DaVincija, Pacioliya i napretku društva nastalom uspostavom prvih država nacija u Francuskoj Louisa XI i Engleskoj Henryja VII. Kao reakcija financijeri sa sjedištem u Mlecima, nasljednici tradicija carskog Rima, očajno su nastojali ponovno uspostaviti feudalnu kontrolu nad Europom slabeći optimističku predodžbu čovjeka koja je našla svoje uporište u Renesansi. Počevši sa Španjolskom inkvizicijom 1492., Mleci i njihovi saveznici razbuknuli

su vjerske ratove širom Europe s ciljem ponovne uspostave temeljno nerazumnog gledišta o čovjeku i svemiru kao prevladavajućom odlikom europske kulture. Pred kraj Keplerovog života, ta strava provalila je u konačnu orgiju ludila koje se danas zove Trideset godišnji rat. No Kepler je shvatio da je to ludilo na zemlji bilo odraz nerazumnog gledanja na nebesa. Astronomija je u Keplerovo vrijeme degenerirala od potrage za univerzalnim fizičkim zakonitostima što je bilo svojstvo egipatsko-pitagorejske znanosti sferne geometrije vrativši se na babilonsko-perzijanski model, koji je podržavao tezu da je čovjek nesposoban otkriti išta istinitog o prirodi fizičkog svijeta te prema tome mora prihvatiti bilokakvu bezrazumnu dogmu koja pogoduje vladajućim autoritetima. To gledište koje je okovalo znanost sofizmima bilo je smišljeno da pripíše nebesima opravdanje za oligarsko-imperijalne oblike društva.

Prizivajući Eratostenov opis Delskog problema Kepler je, kao i Platon, preklinjao svoje suvremenike da shvate kako je njihovo pogrešno gledište na planete odraz isto tako pogrešnog gledišta o sebi samima. Kad znanstvenici i društvo u većini prihvaća aristotelovske doktrine to je onda uzrok političke i društvene propasti koju sad proživljavaju. Kepler, (samo)priznati sljedbenik Kuze, uporno je tvrdio da se glavne zakonitosti svemira podudaraju sa sposobnosti ljudskog uma u pronalaženju tih zakonitosti. Što više postojanje te sposobnosti je samo po sebi naznaka da je svojstvo ljudskog stvaralaštva ujedno i svojstvo Svemira kao cjeline. Kao što je napisao u svojoj **Optici**:

Svatko tko pomno razmišlja o tome naći će (ako odbije tražiti utočište u vjeri u sveto pismo) da postoji Bog, utemeljitelj sve prirode i da je u njenoj samoj mehanici vodio brigu o nadolazećim ljudima. Jer ova pozornica svijeta je tako uređena da kod nje postoje prikladni znakovi pomoću kojih ljudski umovi, na sliku Boga, nisu samo pozvani proučavati božanska djela, iz kojih mogu procijeniti dobrotu utemeljitelja nego isto su tako [ti znakovi] pripomoć u dubljim istraživanjima.

Kepler je odbacio pogrešku zajedničku Ptolomeju, Koperniku i Brahi, koji su ostali vjerni Aristotelovom diktatu da planetarna

kretanja moraju biti nepromjenjive savršene kružnice. Umjesto toga Kepler je usvojio Kuzino gledište da je promjena dobrotvorna odlika i Čovjeka i fizičkog svijeta i stoga **promjenjiva eliptička putanja savršenije izražava postupak samousavršavanja Svemira od matematički savršenih kružnica**. Pokazavši eksperimentalno dobivenim dokazima da su planetarne putanje doista promjenjive i pronasavši zakonitosti koje upravljaju tim kretanjima Kepler je ukazao, protivno Aristotelu, ne samo da je promjena fizička odlika svemira nego i da je ljudski um sposoban to znati. **Za Keplera planet kao materijalni predmet ne postoji u čisto materijalnom svijetu a njegovom putanjom ne upravljaju čisto materijalističke zakonitosti. Dapače, prošla i buduća putanja planeta je staza kroz svemir u kojem zakonitosti fizike, života i spoznaje svaka i sve djeluju svugdje i u svako vrijeme**. Pokazavši da je sposoban otkriti i prenijeti drugima prave zakonitosti koje upravljaju kretanjem planeta, Kepler ne samo da je unaprijedio astronomiju, nego je potvrdio optimističku predodžbu Čovjeka i prirode pred licem prevladavajućeg mnijenja kojem su nametnuli prihvaćanje nerazumnosti (iracionalnosti) i proizvoljnosti i u znanosti i u ljudskom poslovanju. U Einsteinovom vremenu ta kulturna nerazumnost je još jednom počela ovladavati znanost. Krajem 19. stoljeća sve veće količine eksperimentalnih dokaza, kao što su bili fotoelektrički efekt i Planckovo otkriće kvantizacije svjetla i topline, ukazivali su na postojanje temeljne promjene u svojstvima fizičkog djelovanja između mikroskopskog i makroskopskog područja. Ta su otkrića bila u skladu s ranijim radom Gaussa, Fresnela, Riemanna, Webera i drugih, koji su proširivši Leibnizovu metodu infinitezimalnog računa pronašli mikroskopske zakonitosti iz njihovih eksperimentalno potvrđenih makroskopskih učinaka. To je navelo Riemanna, da u svojoj docentskoj dizertaciji inzistira da je znanstveno nevjerodostojno pretpostaviti da se odlika fizičkog djelovanja u makroskopskom području može linearno proširiti na veoma veliko i veoma malo. Umjesto toga, inzistirao je Riemann, znanost mora razviti dinamički pojam fizičke geometrije koja je odraz potencijalne nelinearne promjene

između tih dvaju područja djelovanja. Kao što je Riemann objavio:

Znanje uzročne sprege pojava zasniva se u biti na preciznosti kojom ih sljedimo na niže do beskonačno malog. ... No u prirodnim znanostima gdje jednostavne temeljne koncepcije još uvijek nedostaju za takve sinteze trebamo slijediti pojavu do prostorno malog da bismo zapazili uzročne sprege sve dotle dokle nam mikroskop dopušta. Pitanja glede prostornih odnosa mjerenja u neodređeno malom su prema tome beskorisna.

Kao odgovor na to britanski empiričari pokušali su oživjeti Kanta i Euklida, najzapažljivije kroz radove Jamesa Clerka Maxwella, koji je na poznati način odbacio Riemannov pristup fizici u korist neo-euklidske doktrine koja je isključila "sve geometrije drugačije od naše vlastite" [Maxwellov navod]. Prema tome, kad se razmatra odnos između promatranih makroskopskih učinaka elektromagnetizma u svijetlu sve većeg skupa eksperimentalnih dokaza koji ukazuju na promjenu fizičke odlike u mikroskopskom području, Riemannovo vodstvo se dokazalo najbitnijim, što je Einstein raspoznao.

No međutim, kod Einsteinovih suvremenika pojavila se rastuća popularnost kod znanstvenika pokušaja "objašnjenja" tih pojava statističkim metodama, slično onim kojima su se koristili Ptolomej, Kopernik i Brahe. Te napore predvodio je Niels Bohr, njegov štićenik Werner Heisenberg i Heisenbergov prvi učitelj Max Born.

Pozitivističko gledište tvrdilo je budući da oni nisu znali ni za jedan matematički opis tih pojava osim statističkih metoda, sam svemir mora stoga biti slučajan. Drugim riječima Bohr, Heisenberg i Born i drugi tvrdili su ne da oni tek nisu znali zakonitosti na kojima se te pojave zasnivaju nego da takve zakonitosti uopće ne postoje. Budući nikakve zakonitosti [po njima] nisu postojale, one se nikako ne mogu pronaći. Born je dao sažetak svog gledišta o toj razlici mišljenja u objavljenoj zbirki svog dopisivanja s Einsteinom:

Osnovni razlog razlike mišljenja među nama o valjanosti statističkih zakona je sljedeći. Einstein je bio čvrsto uvjeren da nam fizika može pružiti znanje o objektivno postojećem svijetu. Zajedno s

mnogim drugim fizičarima ja sam se postepeno preobratio, kao posljedica iskustava na polju atomskih kvantnih pojava, na stajalište da to nije tako. U svakom danom trenutku naše znanje objektivnog svijeta je samo gruba aproksimacija iz koje, primjenivši stanovita pravila kao na primjer zakone vjerojatnosti kvantne mehanike, možemo predvidjeti nepoznate (to jest, buduće) prilike.

**Važno je istaknuti da ovo gledište, poznato uglavnom kao Kopenhaška interpretacija kvantnih pojava, slično Ptolomejovoj astronomiji nije znanost. Ono je post hoc kulturno vjerovanje, odraz i u konačnici opravdanje prevladavajućeg egzistencijalizma povezanog s nastojanjima uspostave fašističkih oblika oligarske kontrole nad svijetom. U tradiciji carstava Babilona, Perzije i Rima nakana imperijalista sa sjedištem u Londonu bila je poljuljati uspješno širenje kulturnog optimizma povezanog uz Američki sustav i vratiti se u eru čarobnjaka i kmetova.** Aksiomatski temelji Kopenhaške škole postali su od tada u tolikoj mjeri ukopani u popularno mnijenje te su prihvaćeni kao doktrina čak i od ljudi koji nemaju pojma o fizici što se vidi na primjeru rasprostranjenog prihvaćanja vjerovanja da su Mandevilleske doktrine slobodne trgovačke razmjene izraz "prirodnog reda stvari". Einstein, Planck i nekolcina drugih odbacili su taj radikalni pozitivizam, nepopustljivo braneci uzročnost u znanosti tijekom ranih desetljeća 20. stoljeća. U rujnu 1926. Einstein je jasno izrazio svoje gledište Bornu:

Kvantna je mehanika sasvim sigurno impozantna. No nutarnji mi glas govori da to nije još prava stvar. Teorija kaže mnogo toga, ali nas ustvari ne dovodi nimalo bliže tajni 'iz starine'. Ja u svakom slučaju sam uvjeren da se **On** ne igra kockom. Valovi u 3-dimenzionalnom prostoru, čijom brzinom upravlja potencijalna energija (na primjer elastične gumice)... Uporno radim na izvođenju jednadžbi kretanja materijalnih točaka koje smatramo singularitetima, iz danih diferencijalnih jednadžbi opće relativnosti.

Pišući Bornu mnogo godina kasnije, u rujnu 1944. Einstein je ukratko opisao svoje gledište koje je stalno izražavao:

Mi smo bili antipodi u našim znanstvenim očekivanjima. Vi vjerujete u Boga koji se kocka a ja u potpuni zakon i red u svijetu koji objektivno postoji i koji ja nastojim, na veoma špekulativan način, uhvatiti. Čvrsto **vjerujem**, a i nadam se da će netko otkriti stvarniji način, ili bolje rečeno shvatljiviju osnovicu nego što je meni sudbina dodijelila pronaći. Čak i početni ogromni uspjeh kvantne teorije ne može me navesti na vjerovanje u temeljnu igru kockom, iako sam potpuno svjestan da naši mlađi kolege to tumače kao posljedicu senilnosti. Bez sumnje doći će dan kad ćemo vidjeti čiji instinktivni stav je bio točan.

U rujnu 1950., nakon što je njegovo druženje s Kurtom Gödelom poboljšalo njegovo povijesno i epistemološko znanje, Einstein je pisao Bornu kazavši:

Vidim iz zadnjeg odlomka vašeg pisma da i vi također smatrate kvantni teoretski opis nepotpunim (osvrćući se na stanoviti skup). No nakon svega vi ste uvjereni da ne postoje **potpuni** zakoni za potpuni opis, suglasno pozitivističkoj maksimi **esse est percipi** ['biti znači biti uočen']. Ali to je pak programatski stav, ne znanje. Tu se naši stavovi istinski razlikuju. Za sada, ja sam sâm u svojim gledištima kao što je Leibniz bio glede apsolutnog prostora Newtonove teorije. Eto sad, iznio sam na ogled svoju staru omiljenu temu još jednom. No to je vaša vlastita grješka, jer ste me izazvali.

Pa iako je Einstein nepopustljivo ostao u svom otporu radikalnom pozitivizmu Kopenhaške interpretacije i utrošio većinu svog truda pokušavajući razviti koncepciju koja bi je zamijenila, nije mogao uspjeti iz dva srodna razloga. Jedan, za razliku od Keplera i Leibniza nije bio sposoban potpuno se uzdići iznad prevladavajućeg kulturnog pesimizma koji se odražavao u izopačenju znanosti i društva, i drugo, nije uspio pojmiti, kao što je njegov suvremenik Vernadski ukazao, **da se pitanja koja eksperimentalne činjenice kvantnih pojava postavljaju ne mogu odgovoriti na području matematičke fizike.** Osvrnuvši se na "objektivni svijet" u svom odbacivanju Kopenhaške interpretacije Einstein je prešutno prihvatio aristotelovski sofizam da su svijet misli i svijet fizike odvojeni. Radije, ta pitanja se mogu jedino uzeti u razmatranje kad se fizičke pojave raspoznaju, kao što je to Kepler činio, **kao zapažljivi učinci unutar**

## **svemira u kojem fizika, život i misao djeluju uzajamno jedni na druge unutar kako je to Riemann nazvao višestruko spojenog mnogoznačnika.**

Danas, jedini kompetentni način pristupa tim pitanjima je sa stajališta znanosti fizičke ekonomije, na način kako je Lyndon LaRouche razvio tu znanost. Taj pristup zahtijeva razumijevanje kako su to Gauss i Riemann zvali, hipergeometrijskog područja.

### **Svemir iznutra**

Da bismo došli do početnog razumijevanja onog što se pojavilo kao hipergeometrijska predodžba Svemira, početak ćemo ispitivanjem problema kojeg je Einstein naznačio u svojoj komemoraciji Keplera iz 1930., a to je određivanje putanje Zemlje. To je predstavilo značajan izazov jer je značilo odrediti putanju Zemlje dok stojimo na njoj, ili općenitije, određivanje kretanja Sunčevog sustava dok se krećemo u Sunčevom sustavu.

Kepler je shvatio da je svako pojedino znanstveno istraživanje, kao određivanje putanje Marsa, ustvari istraživanje Svemira kao cjeline a ne pojedine pojave. Svaki pokušaj reduciranja tog problema na mali skup pojedinosti bio bi samo puki sofizam. Taj općenitiji problem može se izraziti kao: **kako odrediti vječnu dinamiku prirode samog Svemira unutar temporalnog odvijanja te vječne dinamike?**

Kao što je Einstein napisao u svom eseju iz 1930.:

Kopernik je otvorio oči najinteligentnijima na činjenicu da je najbolji način zadobivanja jasnog shvaćanja prividnih kretanja planeta na nebesima gledati ih kao kretanja oko Sunca koje uzmemo za nepomično (stacionarno). Kad bi se planeti kretali jednoliko u krugu oko Sunca, bilo bi relativno lako otkriti kako to kretanje mora izgledati sa Zemlje. No budući da su pojave s kojima se moramo uhvatiti u koštac bile zamršenije od toga, zadatak je bio težak. Prva stvar koju treba učiniti bila je odrediti ta kretanja empirijski iz promatranja Tycha Brahe. Tek nakon toga postalo je moguće misliti o otkrivanju općih zakona koje ta kretanja zadovoljavaju.

Da bismo shvatili kako je težak posao bio čak pronaći stvarna rotacijska kretanja moramo razumijeti sljedeće. Nikad ne možemo vidjeti gdje se planet ustvari nalazi u bilo kojem trenutku nego samo u kojem pravcu ga se može baš u tom trenutku vidjeti sa Zemlje, koja se i sama kreće na nepoznati način oko Sunca. Poteškoća tako izgleda neprebrodiva.

Kepler je otkrio način kako uvesti red u taj kaos. Za početak, vidio je da je potrebno prvo pokušati pronaći kretanje same Zemlje.

Kao što je Einstein naveo kretanje planeta u Sunčevom sustavu ne može se izravno promatrati. Može se samo promatrati relativne položaje Sunca, planeta i nepomičnih zvijezda gledano sa Zemlje. Prema tome, da bismo odredili, kao što je na primjer Kepler nastojao učiniti, kretanje planeta Marsa bilo je prvo potrebno razmrsiti koji dio zapaženih promjena u relativnim položajima Marsa, Zemlje, Sunca i nepomičnih zvijezda proizlazi zbog kretanja svakog od njih.

Kepler je pokazao u **Novoj astronomiji**, da su Ptolomej, Kopernik i Brahe svi našli različite matematičke načine kako razmrsiti ta kretanja. Problem za Keplera bio je taj što nijedan od njih nije bio, niti su oni tvrdili, da je točan. Kepler, sljedeći Kuzi nastojao je shvatiti promatrana kretanja kao funkciju pravih uzroka. No nije mogao izravno vidjeti te uzroke, pa je stoga morao nadmašiti ograničenja zapažanja osjetilima i zamisliti zapažena kretanja sa stajališta dostupnog samo razumom.

Ali prije utvrđivanja pravih uzroka, Kepler je morao znati promatrana kretanja, a to je isto zahtijevalo od njega da nadmaši ograničenja zapažanja osjetilima. U slučaju zapaženih kretanja Marsa, Kepler je prvo morao odrediti odnos Marsa prema Zemlji i Suncu. To je značilo znati kretanje Zemlje što nije mogao izravno promatrati. Zbog toga morao je zamisliti [u svojoj glavi!] kako bi kretanje Zemlje moglo izgledati kad bi ga promatrao s Marsa, čije kretanje nije znao! Njegov pristup je potanko opisan u **Novoj astronomiji** no kratke crte opisa slijede.

Sa Zemlje može se promatrati vidljivo kretanje Sunca kroz zodijak tijekom godine. Kepler je shvatio da je to vidljivo kretanje Sunca odraz stvarnog gibanja Zemlje. Periodička narav tog kretanja jasno je naznačavala da je kretanje Zemlje zatvorena putanja. Na taj način mogao si je zamisliti kako bi neki promatrač na Suncu mogao vidjeti Zemlju.

Problematičnije je bilo gledati na Zemlju s Marsa, jer za razliku od Sunca Mars se također kreće. Da bi riješio taj problem, Kepler je počeo zabilježivši položaj Marsa i Sunca u zodijaku u jedinstvenom trenutku kad se Sunce, Zemlja i Mars nalaze na istom pravcu (vidi Prikaz 1 [Prikaz1-3](#)). Taj poredak – konfiguracija – zove se opozicija, koja se nedavno dogodila 7 studenog 2005. U tom trenutku promatrač na Zemlji vidjet će Mars na stanovitom mjestu u pojasu zodijaka a promatrač na Marsu bi vidio i Zemlju i Sunce na mjestu u pojasu zodijaka točno u suprotnom pravcu od položaja Marsa.

U nekoj točki nakon ove obzervacije (povijesno promatranje je utvrdilo da je taj period bio 687 Zemaljskih dana), Mars će se vratiti na isti položaj u svojoj putanji kao kad je ranije bio u suprotnom pravcu sa Zemljom i Suncem.. No Zemlja će tad biti na drugom mjestu u svojoj putanji i zbog toga Mars će se vidjeti na drugom mjestu u pojasu zodijaka (vidi Prikaz 2 [Prikaz1-3](#)). Unatoč tome, promatrač na Marsu bi sad opazio Sunce na istom mjestu u pojasu zodijaka kao što je bilo pred 687 Zemljinih dana. No on bi vidio promjenu položaja Zemlje u zodijaku između dvije periode. Ta zapažanja tvore trokut između Sunca, Zemlje i Marsa čija je osnovica u izravnom pravcu koji su ta tri predmeta tvorila kod prve opozicije i čije krakove tvore pravci gledanja od Zemlje prema Marsu i od Zemlje prema Suncu u tom novom položaju Zemlje. Usporedivši obzervacije s te tri točke gledišta, Kepler je mogao odrediti kuteve tog trokuta. Ponovivši to izračunavanje koristeći opsežni blok podataka Tyhe Brahe sakupljenih kroz dvadeset godina promatranja, Kepler je mogao odrediti točnu putanju Zemlje (vidi Prikaz 3 [Prikaz1-3](#)).

Odredivši putanju Zemlje Kepler se tad okrenuo prema određivanju putanje Marsa. Opsežni blok podataka Keplerovog otkrića potanko je opisan u **Novoj astronomiji** na koju upućujemo čitatelja, no tu je jedna stvar, i od odsudne je važnosti naglasiti je zbog onog što slijedi. Nakon što je Kepler odredio veličinu Zemljine putanje i njen ekscentrični položaj relativno prema Suncu pronašao je da je Marseva putanja također ekscentrična u odnosu na Sunce. Njegova prva pretpostavka za putanje i Marsa i Zemlje bila je da su obadvije kružne. Što se tiče Zemlje to je poslužilo kao uspješna približna postavka jer je Zemljina ekscentričnost sasvim malena. Međutim za Mars odstupanje ekscentričnosti od čiste kružnice imalo je značajnu vrijednost. Kepler je to otkrio uspoređujući zapažene položaje Marsa s geometrijskim svojstvima kruga, ili točnije, tri različita položaja Marsa morala bi biti dostatna za određivanje jedinstvene kružnice. Iz te pretpostavke proizlazi da bi bilo koja tri zapažena položaja Marsa morala ležati na istoj kružnici. Ali nakon ispitivanja 79 skupova od tri zapažena položaja pronašao je da svaki skup od tri leži na različitoj kružnici. Kepler je tad shvatio da se tu ne radi o kružnoj putanji i nakon mnogo truda, pokazao je da je ta putanja elipsa sa Suncem u jednom njenom žarištu.

## Razmrsivanje sjena

Kao što je gore rečeno nastojeći odrediti putanju Marsa, Kepler je nastojao odrediti prirodu Svemira u cjelini, **Svemira koji bi proizveo Sunčev sustav sa Zemljom na koju je došao život i počeo njom ovladavati i koju su nastanila spoznajna ljudska bića i otkrivala njegove zakonitosti**. Kepler je uvidio da bi za istraživanje tih dubljih zakonitosti putem astronomije morao isto tako istraživati postupak kojim vrši ta ispitivanja. Baš kao što je morao odrediti kretanja Sunčevog sustava unutar samog sustava, isto tako da bi odredio osnovnu prirodu Svemira morao je stvoriti samosvesnu predodžbu uloge svog vlastitog uma u razvoju tog Svemira. To je značilo da je morao istraživati: spregu između fizičkih dijelova Svemira, **uzajamno djelovanje tih fizičkih dijelova i svojih osjetila, uzajamno djelovanje tih zapažanja osjetilima i svog uma, te uzajamno**

**djelovanje svog uma i Svemira kao cjeline.** Budući da je raspoznao da su sva astronomska promatranja posljedica uzajamnog djelovanja svjetlosti i ljudskog oka, znajući zakonitosti svjetlosti i vida pružile bi mu kariku u spregi između spoznajnog i fizičkog područja. Kao što je napisao u uvodu u svoju **Optiku**:

Kakvo čudo onda, ako je ta zakonitost svakog ukrašavanja u svijetu, koju je božanski Mojsije uveo odmah prvog dana u jedva stvorenu materiju kao stanovitu vrstu pribora Stvoritelja u svrhu davanja oblika i rasta svemu, ako je, kažem, ta zakonitost, najveće odličje cijelog materijalnog svijeta, matrica produhovljenih sposobnosti, i lanac koji spaja materijalni i duhovni svijet, prerasla u iste zakone koji će svijet namjestiti [materijalnim i drugim 'stvarima'].

U **Optici** Kepler je razradio da taj sklad između zakona fizike i spoznaje ima svoj odraz u eliptičkim planetarnim putanjama i svojstvima svjetlosti i vida i da je to onda posebni slučaj jedinstvene koncepcije stožaste funkcije.

Važno je ovdje rastjerati popularni mit koji se ponavlja u gotovo svakoj gimnaziji i sveučilištu u matematičkim odjelima danas. Današnji matematičari, uvijek spretni u izbjegavanju ['Artful Dodger-i'], uporno tvrde da su Grci istraživali presjeke stošca samo zbog njihove matematičke čistoće bez ikakvog osvrta na njihovo značenje u fizičkom svijetu. Tako, ustraju ti sofisti, kad je Kepler otkrio eliptičku narav planetarnih putanja, bilo je to potpuno iznenađenje i sasvim slučajno glede čisto matematičkih razmatranja Grka. Nema nikakve istine u tome. Grčka istraga stožastih presjeka nastala je iz istraživanja Pitagorejaca u svezi s problemom udvostručenja kocke. Kao što je Platon naveo u **Timeju** to je bilo istraživanje svojstava fizičkog svemira, načina kao se ta fizička svojstva istinski odražavaju u ljudskom umu, i uzajamnom djelovanju ljudskog uma i Svemira u cjelini. Zato Keplerovo otkriće da su planetarne putanje odraz drukčijeg oblika iste stožaste funkcije nije nimalo slučajno, ono nije bilo iznenađenje osim za današnje matematičare.

Štoviše, kad je Kepler otkrio planetarnu manifestaciju stožastih presjeka on je isto tako shvatio univerzalni značaj toga ukazujući, kao i kod Arhitine konstrukcije udvostručenja kocke pomoću torusa, valjka i stošca, da karakteristika djelovanja u fizičkom svemiru nije jednostavna sferična (kuglasta) nego pripada višoj vrsti, vrsti koju su Gauss i Riemann kasnije prozvali hipergeometrijskom.

Viša vrsta hipergeometrije počinje se javljati iz istraživanja općeg oblika jednostruke stožaste funkcije, čije fizičke manifestacije su eliptičke putanje i udvostručenje kocke. U svojoj **Optici** Kepler je istraživao tu stožastu funkciju sa stajališta svjetlosti i vida.

Iz jedne perspektive stožasti presjeci se tvore kretanjem ravnine koja siječe stožac. (Prikaz 4 [Prikaz 4-5.pdf](#)). No gledajući na projekciju na ravnu plohu javlja se matematički prekid u prelasku s područja eliptičkog djelovanja na područje hiperboličkog. (Vidi Prikaz 5a-b [Prikaz 4-5.pdf](#)). Kao što Kepler opisuje:

Govoreći analogno radije nego geometrijski postoji između tih linija sljedeći poredak iz razloga njihovih svojstava: on prelazi sa ravne crte kroz beskonačni broj hiperbola na parabolu i odatle kroz beskonačni broj elipsa na kružnicu. Najšira (najtuplja [tupi kut!]) od svih hiperbola je ravna crta, a najoštrija parabola. Slično tome najoštrija od svih elipsa je parabola, najšira kružnica. Prema tome parabola ima na jednoj strani dvije stvari beskonačne po svojoj naravi, hiperbolu i pravac a na drugoj strani dvije stvari koje su konačne i zatvaraju se na sebe, elipsu i kružnicu. Ona [parabola] samu sebe drži u sredini i ima srednju narav. Jer ona je također beskonačna ali preuzima ograničenje s druge strane, jer što se više širi to više postaje paralelna sama sebi i ne širi svoje krakove (takoreći) kao hiperbola, nego se povlači od zagrljaja s beskonačnosti, tražeći uvijek manje iako uvijek obuhvaća više. Kod hiperbole što više je ustvari obuhvaćeno između krakova ona traži još više. Prema tome suprotne granice su kružnica i pravac. Prva je čista zakrivljenost, potonja čista pravocrtnost. Hiperbola, parabola i kružnica smještene su između i sudjeluju u pravocrtnosti i zakrivljenosti, parabola jednako, hiperbola više u pravocrtnosti a elipsa više u zakrivljenosti.

Kepler je nadalje pokazao da epistemo-loške posljedice eliptičkih putanja planeta nisu samo izražene u odnosu na svjetlost i vid. Najzamjetljivije, u svom djelu **Skladnosti svijeta** [Harmonices mundi] pokazao je podudarnost između odnosa određivanja najvećih i najmanjih brzina između eliptičkih putanja s odnosima dobro ugođene polifonije koju je naknadno J.S. Bach razvio kroz svoje skladbe. Ovdje se ponovno javlja prekid s fizičkim značenjem. Poimenice, postojanje lidijskih intervala oformljenih između putanja Marsa i Jupitera i asteroidnog pojasa koji je tek trebao biti otkriven! Taj fizički prekid, kao mjesto promjene (vrsta prebacivanja glasovnog registra [registri, ili niz tonova u kojima glas ima istu boju, pa kod mjesta prebacivanja registra glas mijenja boju]) odražava se isto tako u razlikama fizičke naravi planeta koji su smješteni s različitih strana tog prekida. Taj harmonički odnos i pridruženi prekid su nasljedni odraz harmonički ustrojenog plazma-diska iz kojeg se razvio Sunčev sustav. Naknadna otkrića hiperboličke putanje kometa i Gaussovo određivanje putanje asteroida Ceresa pokazali su da je Keplerovo razumijevanje eliptičkih putanja kao posebnog slučaja općenitije stožaste funkcije bilo točno. Ovo poopćeno razumijevanje Keplerove astronomije ukratko je opisao Gauss u svom djelu **Teorija gibanja nebeskih tijela s putanjama oko Sunca u stožastim presjecima**.

Gauss i njegov učenik Riemann otišli su još dalje naznačivši da je Keplerova opća stožasta funkcija i sama poseban slučaj općenitije, više hipergeometrijske ili hiperstožaste funkcije. Te hipergeometrijske funkcije su odraz ne svojstava Sunčevog sustava per se nego oblika univerzalnih svojstava koji je stvorio karakteristike Sunčevog sustava.

### **Ne-beskonačni Svemir**

Postavivši stožaste funkcije sa stajališta jedinstvene koncepcije fizičkog, biološkog i spoznajnog područja astronomije Kepler je unaprijedio proces, kojeg je započeo Kuza, proces povratka znanosti na više koncepcijske razine pred-euklidskih Grka, i pretkazao kasnija dostignuća Kästnera, Gausa i Riemanna. To je značilo pročititi

znanost od pogubnih učinaka ropskog prihvaćanja Euklidove geometrije.

Odsudna točka napada za Kuzu i Keplera bila je razbiti lažnu i proizvoljnu aristotelovsku koncepciju matematički beskonačnog kojeg su Euklidovi Elementi postavili u svetište. Kad bi prostor bio, kao što je Euklid tvrdio beskonačno proširen u tri pravocrtna smjera, samo jednolično, kružno ili pravocrtno kretanje bilo bi moguće. U takvom svijetu fantazije eksperimentalno utvrđene eliptičke putanje mogle bi postojati samo kao proizvoljne aberacije u svijetu za koji se pretpostavlja da se ne mijenja. Kao što je Abraham Kästner kasnije rekao formalna pravovaljanost Euklidove geometrije stoji ili pada s prihvaćanjem pretpostavke paralelnosti. Euklid je bio toliko svjestan te ranjivosti pa nije izravno spomenuo beskonačno u svojoj izjavi, i navodio je postulat paralelnosti veoma štedljivo u dokazima teorema koji slijede. Ipak, kao što su Kästner i Gauss obojica podcrtali, bez pretpostavke postulata paralelnosti nema sličnih trokuta, a bez sličnih trokuta čitava zgrada Euklidove geometrije pada. Gauss je otišao još dalje od Kästnera ističući da postulat paralelnosti može biti točan samo ako se pretpostavi da je zakrivljenost fizičkog prostora nula, činjenica koju se jedino može odrediti fizičkim mjerenjima a ne matematičkim formalizmom Euklidove geometrije.

Sa subjektivnog stajališta vjerovanje u fizičku stvarnost Euklidove geometrije zahtijeva prihvaćanje Kantovog aksioma da ljudski um mora biti praktički izgrađen da ne dopušta promjene jer samo tako bi mislio o Svemiru Euklidskim pojmovima.. No drevna razlaganja, kao što je Atrhithin dokaz ovisnosti udvostručenja "Euklidske" kocke, o višoj stožastoj funkciji, već pokazuje da je Kantovo odavanje poštovanja Euklidovoj geometriji lažno. Keplerove projekcijske konstrukcije stožastih presjeka pružaju daljnju demonstraciju da je takvo Kantovo gledište potpuno nestvarno.

U Keplerovoj konstrukciji beskonačno se javlja ne kao nedostižna, neodređena veličina, nego mjesto promjene, prijelaz između eliptičkog i hiperboličkog područja djelovanja spojenih jednom stožastom



funkcijom. Prema tome, **s Keplerovog stajališta beskonačno je u sredini, ne na kraju ne-beskonačnog samoomeđenog mnogoznačnika.** Eksperimentalne i epistemološke tvrdnje takve predodžbe ne-beskonačnog Svemira već je Platon predstavio u **Timeju**. Kuza i Kepler su oživjeli i proširili te diskusije na mnogim mjestima. U svom djelu **O učenom neznanju** Kuza je istaknuo da prividno beskonačno nastaje u obliku samoomeđenog Svemira "koji se razotkriva", Svemira "koji se pokriva". [Tu treba zamisliti otkrivanje i pokrivanje plašta] U razotkrivenom se obliku suprotnosti, kao što su najmanja i najveća veličina, razlikuju no u pokrivenom obliku takve se suprotnosti podudaraju. 1610. godine Kepler je objavio fizičku tvrdnju Kuzine samoomeđene predodžbe: kad bi Svemir bio beskonačan, noćno nebo ne bi bilo tamno nego ispunjeno svjetlom beskonačnog broja zvijezda. Taj se paradoks danas povezuje s Williamom Olbersom, Gaussovим bliskim suradnikom, koji je gotovo dvijesto godina kasnije izjavio isto u svojoj izravnoj tvrdnji protiv Kanta.

U svojoj docentskoj dizertaciji Riemann je također naveo isti slučaj ne-beskonačnog Svemira:

Kad se konstrukcije u prostoru prošire na neizmerno veliko, mora se razlikovati neograničenost od beskonačnosti. Jedno pripada odnosima proširenja, drugo onima mjerenja. Da je prostor neograničeni trostruko prošireni mnogoznačnik pretpostavka je koju se primjenjuje u svakoj predodžbi vanjskog svijeta. Njome se u svakom času područje stvarnog opažanja nadopunjuje pa se onda mogući položaji traženog predmeta konstruiraju i u tim primjenama se pretpostavke neprestano provjeravaju. Neograničenost prostora ima prema tome empirijski veću vjerojatnost od svakog drugog iskustva vanjskog [svijeta]. No iz toga nikako ne proizlazi njegova beskonačnost, nego dapače prostor bi neophodno bio konačan, ako se pretpostavi da su tijela neovisna o prilikama i ako se prostoru pripiše konstantna mjera zakrivljenosti, pod uvjetom da ta mjera zakrivljenosti ima bilo koju pozitivnu vrijednost ma koliko ona bila malena.

Kao što je Kuza isticao taj **protueuklidski** pojam samoomeđenog Svemira, odgovara naravi i fizičkog svijeta i

**Čovjeka.** Kao i fizički svijet čovjekov život je konačan ali neomeđen. Počinje rođenjem i završi smrću. Sa stajališta smrtnosti svijet prije rođenja i svijet nakon smrti izgledaju beskonačno daleko. No taj konačni život kroz prijenos stvaralačkih otkrića kroz kulturu, utječe na, i na njega utječe, ono što mu prethodi i što dolazi poslije. Ta naizgled beskonačna područja, izvan temporalnih granica nisu izvan smrtnog života čovjeka, nego u sredini. **Stoga, vjerovati u Euklidovu geometriju znači odbaciti besmrtnost ljudske duše.**

Kuzino i Keplerovo poništenje Euklidove geometrije postavilo je pozornicu razvoju nove, fizički određene predodžbe ne-beskonačne geometrije. Prve korake u tom smjeru poduzeo je rad Girarda Dasarguesa (1593. – 1662.) koji je bacio u koš Euklidovu geometriju u prilog Keplerovog pojma projiciranih odnosa i time uveo potpunu zabranu aristotelovske koncepcije beskonačnog u znanosti.

Jednostavni pokus može se napraviti da bi oslikali Desarguesovu metodu. Nacrtajte veliki pravokutnik na ploči. Suprotne stranice pravokutnika izgledaju prema pretpostavkama Euklidove geometrije paralelne pa se nikad ne sastaju čak i kad ih se produlji u beskonačnost. Uzmite sad prozirnu ploču pleksiglasa i ukosite je pod kutem prema ravnini ploče s ucrtanim pravokutnikom. Zažmirivši na jedno oko precrtajte obris pravokutnika na pleksiglas. Time se dobije stožasta projekcija s ploče na ravninu pleksiglasa s okom kao vrhom stošca. Pod tom projekcijom slike suprotnih stranica pravokutnika, koje su izgledale paralelne na ploči, sad se sijeku na pleksiglasu. **I tako, samo okretom glave beskonačno dolazi u konačno!**

Na taj način Desargues je počeo poopćavati Keplerovu razradu Kuzine ideje o ne-beskonačnom Svemiru ostvarivši mnoga važna otkrića u znanosti, a jedno od njih je posebno važno našim objašnjenjima ovdje. Desargues je pokazao da iako se kod projiciranja duljine, proporcije duljina i kutevi općenito mijenjaju, postoji jedno svojstvo koje ostaje nepromjenjivo. Kasnije nazvano križni omjer, to svojstvo je omjer dvaju omjera koji proizlaze iz četiri proizvoljne

točke. (Vidi Prikaz 6 [Prikaz 6-11](#)). Budući da su stožasti presjeci u projekcijskom odnosu jedni s drugima, nepromjenjivost križnog omjera je svojstvo stožaste funkcije. (Vidi Prikaz 7 [Prikaz 6-11](#)).

Daljnje pojašnjenje istog načela može se uzeti iz još jednog Desarguesovog otkrića, nazvanog potpuni četverokut.

Desargues je dokazao da sjecišta produljenih stranica i dijagonala proizvoljnog četverokuta tvore projekcijski razmještaj u kojem su križni omjeri sačuvani. (Vidi Prikaz 8 [Prikaz 6-11](#)). Ta vrsta križnog omjera je posebni slučaj, zvan harmonički, jer B dijeli segment AC u istom omjeru u kojem C dijeli AD. Kad se pak gleda na potpuni četverokut dinamički i kad se zamisli, u tradiciji Keplera, da se točka D pomiče prema beskonačnom u jednom smjeru, položaj točke C mora se isto micati da bi se zadržao harmonički odnos između sve četiri točke. To pomicanje će također promijeniti kuteve četverokuta. (Vidi Prikaz 9 [Prikaz 6-11](#)). Kad stranice četverokuta postanu paralelne točka D dosegne beskonačno, ili obratno rečeno kad točka D dosegne beskonačno stranice četverokuta postanu paralelne. U toj točki harmonički križni omjer točaka A, B i C je još uvijek zadržan (Vidi Prikaz 10 [Prikaz 6-11](#)). Ako sad malo ukosimo stranice četverokuta [na drugu stranu] točka D će se pojaviti s druge strane točke A, a kroz cijelo vrijeme pomicanja točka D će zadržati harmoničke proporcije križnog omjera. (Vidi Prikaz 11 [Prikaz 6-11](#)).

Sa stajališta Euklidove geometrije harmoničko svojstvo potpunog četverokuta izgleda mistično, jer u Euklidovoj geometriji beskonačno ne može imati nikakvog učinka na konačno.. No kao što Desarguesova konstrukcija pokazuje, "beskonačno" kod potpunog četverokuta je kao i kod Keplerovih stožastih projekcija jedna točka promjene, koja zadržava harmonički odnos s konačnim dijelovima, baš kao i svaka "konačna" točka. Ta vrsta paradoksa sučeljuje euklidske sofiste s dilemom: ili zadržati Euklidovu geometriju i tvrditi da su harmonička svojstva potpunog četverokuta čarolija ili raspoznati, kao što je to Kepler učinio, da eksperimentalna činjenica fizičkih zakonitosti izražava takve

harmoničke odnose i priznati da je Euklidova geometrija lažna.

Potpuni četverokut također prikazuje rani izraz onog što će kasnije Riemann nazvati "Dirichletovo načelo". Postoji jedinstveni povezani odnos između položaja A, B, C i D, te kuteva i duljina stranica i dijagonala četverokuta. Odnos je posljedica harmoničkog načela i ono se izražava u nepromjenjivosti križnog omjera. Baš to harmoničko načelo je primarno. Položaji vidljivih predmeta su funkcija tog harmoničkog načela. Harmoničko načelo postoji, čak i kad je jedna točka naizgled beskonačno daleko jer točka u beskonačnosti nije izvan procesa nego unutar njega. Ono što izgleda beskonačno tek je točka promjene unutar inače ne-beskonačnog samoomeđenog mnogoznačnika.

**Potpuni četverokut i Keplerove stožaste funkcije ne mogu postojati u euklidskom beskonačno proširenom prostoru, nego samo u Kuzinom i Keplerovom ne-beskonačnom samoomeđenom mnogoznačniku. U takvom mnogoznačniku, promjena je bitno svojstvo i ono što matematički izgleda beskonačno mora se shvatiti kao izražaj te promjene.**

## Staza ka hiper-stožastim funkcijama

Nakon Desarguesove razrade, Blaise Pascal i Leibniz su dalje razradili narav fizičkog izraza Keplerove stožaste funkcije. U svojoj razradi infinitezimalnog računa Leibniz je pokazao da stožasta funkcija ima tri različita ali povezana oblika: eksponencijalnu krivulju, kružnu i hiperboličku. U suradnji s Bernoullijem Leibniz je prikazao da je lančanica [krivulja lanca] fizički izraz triju oblika stožastih funkcija. To je još jednom pokazalo da se fizička svojstva Svemira poklapaju s Kuzinom i Keplerovom predodžbom ne-beskonačnog samoomeđenog mnogoznačnika. Međutim, u Keplerovoj astronomiji je već bio ugrađen eksperimentalni dokaz da se te stožaste funkcije moraju nadomjestiti višom vrstom **hiper-stožastih funkcija**. To se vidjelo u takozvanom "Keplerovom problemu". Istraživanje tog problema dovelo je Gaussa prvo do otkrića kako je on to nazvao eliptičkih transcendentalnih veličina.

"Keplerov" problem je nastao iz pokušaja određivanja kretanja planeta po eliptičkoj putanji. Već je Kepler bio pokazao da je nemoguće u potpunosti opisati zakonitost na kojoj se zasniva to gibanje pomoću funkcija kružnog hoda [djelovanja]. Naknadni rad Leibniza ne samo da se s tim poklapao nego je i ukazao da i druge funkcije povezane sa stožastim hodom, hiperbolične i eksponencijalne, nisu zadovoljavajuće pri opisivanju gibanja planeta po eliptičkoj putanji. Već 1797. Gauss je raspoznao da je razlog tome što eliptičkim gibanjem upravljaju **eliptičke** transcendentalne veličine koje su različite i višeg oblika od jednostavnih kružnih, eksponencijalnih i hiperboličkih funkcija. Nakon tih ranih otkrića Gauss je nastavio istraživanjima odnosa između tih dvaju transcendentalnih područja. Jedno od njegovih najpronikljivijih opažanja nalazi svoj izraz u njegovim istraživanjima pentagramma mirificum-a. Pentagramma mirificum je izvorno otkrio Keplerov suvremenik John Napier u vezi sa svojim istraživanjima sferne trigonometrije. Napier je raspoznao da samoomeđujuća narav kugle ima svoj odraz u povezanim odnosima između stranica i kutova sfernog trokuta. U takvom sfernom trokutu duljine stranica su funkcije kuteva i obrnuto. U posebnom slučaju sfernog pravokutnog trokuta ti odnosi imaju svoj odraz u pentagramma mirificum-u.

Za razliku od euklidskog trokuta, u kojem se stranice mjere duljinama, u sfernom trokutu i stranice i kutevi izražavaju se kao kutevi. (Vidi Prikaz 12 [Prikaz12-18](#)). Napier je pokazao da su u pravokutnom sfernom trokutu tri stranice i dva druga kuta povezani jedni s drugima odnosom između svojih sinusa i kosinusa. (Vidi Prikaz 13 [Prikaz12-18](#)). Povezanost između tih pet komponenata može se posložiti tako da one čine samo-polarni sferni peterokut kojeg je Napier nazvao pentagramma mirificum. (Vidi prikaz 14 [Prikaz12-18](#)).

Gauss je bio zainteresiran odnosom Napierovog sfernog trokuta sa svojim eliptičkim transcendentálnim veličinama. Shvatio je da je Napierov pentagramma mirificum uspostavio da kuglasta ploha ima prirodenu peterostruku periodičnost. Vidio je tu peterostruku periodičnost u

svijetlu dobro poznatog Apollonijevog otkrića da je potrebno imati pet točaka za jedinstveno određivanje presjeka stošca. Time se opći presjek stošca razlikuje od kružnice gdje su potrebne tri točke i pravca kojem trebaju samo dvije. Gauss je raspoznao da su petostruka periodičnost kugle i pet točaka koje određuju presjek stošca odraz razlike između višeg oblika eliptičkih transcendentalnih veličina i nižih oblika transcendentalnih veličina povezanih s kružnim, hiperboličnim i eksponencijalnim funkcijama. Te proste transcendentalne veličine povezane s Keplerovom stožastom funkcijom javljaju se u vezi s fizičkim djelovanjem sa svojstvom jedne jedinstvene zakonitosti promjene, kao što su neizmjerivost između luka i sinusa u jednolikom kružnom hodu. No eliptičke transcendentalne veličine, kao što je Gauss pokazao određuju dvije zakonitosti promjene, što se na primjeru elipse može vidjeti u dvostrukoj neizmjerivosti između sinusa i luka i sinusa i kuta. Slična, **eliptička** dvostruka neizmjerivost javlja se u kružnom njihalu između kuta i sinusa te kuta i vremena.

Sprega između sfernog peterokuta i eliptičkih funkcija se može oslikati Gaussovom demonstracijom, kad se sferni samopolarni peterokut projicira na ravninu koja je tangencijalna s kuglom pomoću stošca čiji se vrh nalazi u središtu kugle, onda se dobije ravni pravocrtni peterokut. (Vidi Prikaz 15 [Prikaz12-18](#)). Pet vrškova ovog ravnog peterokuta određuju jedinstvenu elipsu. Crte visine tog ravnog peterokuta sve se sijeku u jednoj točki, a to je projekcija točke tangencije ravnine i kugle. (Vidi prikaz 16 [Prikaz12-18](#)). Gauss je pokazao da je to svojstvo odraz činjenice da su vršci suprotnih stranica ravnog peterokuta preslik polova i ekvatora sfernog samo-polarnog peterokuta. (Vidi Prikaz 17 [Prikaz12-18](#)).

To je odražavalo vrstu "Dirichletovog načela" jer se na kugli krivulje visine sfernog pentagrama mogu sijeći u bilo kojoj točki unutar sfernog peterokuta. Međutim kod ravnog peterokuta postoji samo jedan skup visina [pravaca]. Stoga sferni samopolarni peterokut odražava čitav mnogoznačnik ravnih peterokuta, gdje je svaki od njih odraz eliptičkog hoda. Odnos između tih ravnih peterokuta može

se izraziti samo eliptičkom transcendentnom veličinom. Prema tome, sferni pentagramma mirificum je otvoreni [razgrnuti] oblik eliptičke funkcije.

U svom radu s pentagrammom mirificumom Gauss je zatim istraživao ovaj ravni peterokut upisan u elipsu u svijetlu Keplerovog određivanja položaja planeta u eliptičkoj putanji. (Vidi Prikaz 18 [Prikaz12-18](#)). On je pokazao da taj odnos između sfernog peterokuta i njegove projekcije ima izraz njegove nove **eliptičke** transcendentalne veličine. Ta činjenica ukazuje da je svojstvo sfernog hoda u svom dubljem smislu eliptičko i ne može se u potpunosti opisati kružnim funkcijama, kao što bi to moglo izgledati naivnim zapažanjem osjetilima. Obrnuto tome, činjenica da eksperimentalni dokazi pokazuju da je planetarno gibanje eliptičko a ne kružno kao što je Aristotel dogmatski uporno tvrdio, zahtijeva odbacivanje naivnih dojmova kugle u prilog viših oblika spoznaje na koju ukazuju Gaussove i Riemannove hipergeometrijske funkcije.

### **Riemannova samorazvijajuća domena**

Baš kao što je Keplerova metoda, prouzrokovana eksperimentalno određenim eliptičkim putanjama, dovela do predodžbe ne-beskonačne, samoomeđene stožaste funkcije, ta ista metoda prouzrokovana "Keplerovim problemom" navela je Gausa na nadomještanje Keplerovog rezultata (kao što je to i sam Kepler zatražio) i uspostavu predodžbe više transcendentalne veličine. Međutim, takve eliptičke transcendentalne veličine nisu mogle zadovoljiti kod izražavanja viših oblika fizičkog djelovanja, koja je Riemann opisao kao "višestruko spojeni neprekinuti mnogoznačnici". Zadovoljavajuće metode shvaćanja tih vrsta fizičkog djelovanja nije bilo sve dok Riemann nije ujedinio i unaprijedio Gaussov rad na hipergeometrijskim funkcijama. Još više, baš kao što su Keplerove eliptičke putanje i Gaussovo istraživanje istih proizveli predodžbe univerzalnog značenja, Riemannovao istraživanje fizičkih procesa kojima upravljaju hipergeometrijske funkcije, dovelo je do većeg razumijevanja Svemira kao cjeline.

To razumijevanje razradio je u svom djelu **Teorija Abelovih funkcija** i svojim predavanjima o Gaussovima hipergeometrijskim funkcijama. U tim radovima Riemann razvija moć [potenciju] Riemannovih površina koje predstavljaju koncepcije povezane uz višestruko spojeni hipergeometrijski hod. Budući smo konstrukcije Riemannovih površina potanko obrađivali u ranijim nastavcima ovog pedagoškog niza, ovdje ćemo dati samo sažetak tih konstrukcija. Riemann je uočio da se ne-beskonačni, samoomeđeni mnogoznačnik kojeg naznačuje Keplerova stožasta funkcija, kao i Desarguesova nacrtana geometrija, poklapa s stereografskim preslikavanjem ravnine na kuglastu površinu. Ta "Riemannova kugla" je ne-beskonačna, samoomeđena površina, kod koje je Sjeverni pol te površine točka promjene, koja u ravnini izgleda beskonačno udaljena. Kad se Keplerova stožasta funkcija preslika na Riemannovu kuglu, naizgled prekinuta Keplerova stožasta funkcija postaje neprekinuta funkcija. (Vidi Prikaz 19 [Prikaz19-24](#)). Prekid između eliptičkog i hiperboličkog hoda ostaje, ali na Riemannovoj kugli razvidno je prikazan ne kao Euklidova vrsta matematički beskonačnog nego kao jedinstvena točka promjene. Sličnu se konstrukcije može također zamisliti za Desarguesov potpuni četverokut.

Riemann je pokazao da su jednostavne periodičke, kružne, hiperboličke i eksponencijalne transcendentalne veličine po svom obliku u skladu s ne-beskonačnim samoomeđenim mnogoznačnikom čiji je izraz Riemannova kugla. (Vidi Prikaz 20 [Prikaz19-24](#)).

No Gauss, Jacobi, Abel i Riemann su svi pokazali da dvostruko periodične eliptičke transcendentalne veličine tvore četiri točke u beskonačnosti. (Vidi Prikaz 21 [Prikaz19-24](#)). Riemann je istaknuo da se ne-beskonačni, samoomeđeni mnogoznačnik sa četiri prekida ne može prikazati u sfernom obliku. Njegova se geometrijska svojstva radije poklapaju s likom prstena [torusa]. (Vidi Prikaz 22 [Prikaz19-24](#)).

Nastavivši to istraživanje hiper-eliptičkih i Abelovih funkcija, Riemann je pokazao da svaki uzastopni prijelaz na viši oblik transcendentalne funkcije sadrži sve veći

broj prekida. Prema tome svako se povećanje broja prekida povezuje s promjenom odlike (roda) pridruženog ne-beskonačnog mnogoznačnika. (Vidi Prikaz 23 [Prikaz19-24](#)). Geometrijski prikaz promjene između mnogoznačnika raznih rodova dosljedan je topološkoj razlici između kugle i prstena. Ta topološka razlika nalazi svoj izraz u sposobnosti mnogoznačnika da obuhvati veći broj izrazito posebnih staza djelovanja. Svaka dakle uzastopna porodica ne-beskonačnog, samoomeđenog mnogoznačnika ima sposobnost izražavanja fizičkog djelovanja koje ima uzastopno sve veću kompleksnost. No baš kao što je Keplerova obrada stožastih presjeka sa stajališta projekcije razotkrila osnovicu epistemološkog značenja eliptičkog gibanja, gledajući taj prijelazni niz samoomeđenih Riemannovih mnogoznačnika u projekcijskom obliku otkriva također njihovu pravu ljepotu.

Uzmimo kao početnu točku najjednostavniji slučaj: samoomeđeni kuglasti mnogoznačnik. Projekcija tog mnogoznačnika izražava se projekcijskim odnosom Keplera i Desarguesa. Uzmimo sad sljedeći slučaj: samoomeđeni prsten povezan s eliptičkim transcendentalnim veličinama. Oblik njegovog preslika je paralelogram sa četiri naizgled beskonačne veličine. (Vidi Prikaz 24 [Prikaz19-24](#)). Razmotrite tu porodicu mnogoznačnika, kao što je to Riemann učinio, kao prikaz mnogoznačnika fizičkog potencijala. U tom pogledu odnos između ortogonalnih staza najmanje i najveće promjene potencijala određuju četiri naizgled beskonačne veličine. Baš kao što "točka u beskonačnosti" određuje, na primjer, harmoničke odlike potpunog četverokuta, četiri "točke u beskonačnosti" eliptičke transcendentalne veličine određuju harmoničke odlike tog mnogoznačnika. Izraz toga se nalazi u , na primjer, u pretobrazbi odlike potencijala iz kružne granice blizu središta mnogoznačnika u granicu u obliku kvadrata prema rubovima.

No međutim, moramo razmotriti naizgled beskonačne veličine kod eliptičkih transcendentalnih veličina ne kao "beskonačne" nego kao prekide unutar inače samoomeđenog neprekinutog procesa. Drugim riječima baš kao što Keplerova stožasta funkcija daje preobraz-

bu naizgled beskonačne granice između eliptičkih i hiperboličkih veličina u prekid unutar inače neprekinutog, samoomeđenog mnogoznačnika, sličan način "nastavka preko beskonačnog" mora se pronaći za eliptičke transcendentalne veličine.

Da bi to napravio Riemann je uporabio otkriće drugog Gaussovog učenika, Ferdinanda Möbiusa, koji je razradio Gaussovu obradu kompleksnih funkcija. Möbius je istraživao svojstva naizgled najjednostavnije vrste kompleksne funkcije: jednostavnu linearnu preobrazbu oblika  $(a*z+b)/c*z+d$ , gdje je  $z$  varijabla a  $a, b, c, i d$  proizvoljni kompleksni brojevi. Ove Möbiusove preobrazbe igraju sličnu ulogu glede viših transcendentalnih funkcija kao što eksponencijalne funkcije igraju glede Leibnizove lančаницe i jednostavnih transcendentalnih veličina.

Primjeri jednostavnih preobrazbi su translacija, inverzija, rotacija, i njihova kombinacija. (Vidi Prikaz 25a-f [Prikaz25-28](#)).

Möbius je otkrio da su ove jednostavne vrste kompleksnih preobrazbi ustvari poopćenja Keplerove i Desarguesove nacrte geometrije. Kod ovih Möbiusovih preobrazbi križni omjer bilo kojih četiriju kompleksnih brojeva je nepromjenjiv. Kad križni omjer nije kompleksni broj četiri točke leže ili na kružnici ili pravcu. U skladu s Kuzom pravac moramo smatrati kružnicom čije središte je "točka u beskonačnosti".

Uvijek je moguće naći jedinstvenu Möbiusovu preobrazbu koja preslikava bilo koje tri točke na nulu, jedan ili beskonačnost. Stoga je najjednostavnije geometrički odrediti križni omjer glede Möbiusovih preobrazbi kad su tri točke koje tvore križni omjer jednake nula, jedan ili beskonačno. Na Riemannovoj kugli to označava točke na južnom polu, sjevernom polu i ekvatoru. (Vidi Prikaz 26 [Prikaz25-28](#)).

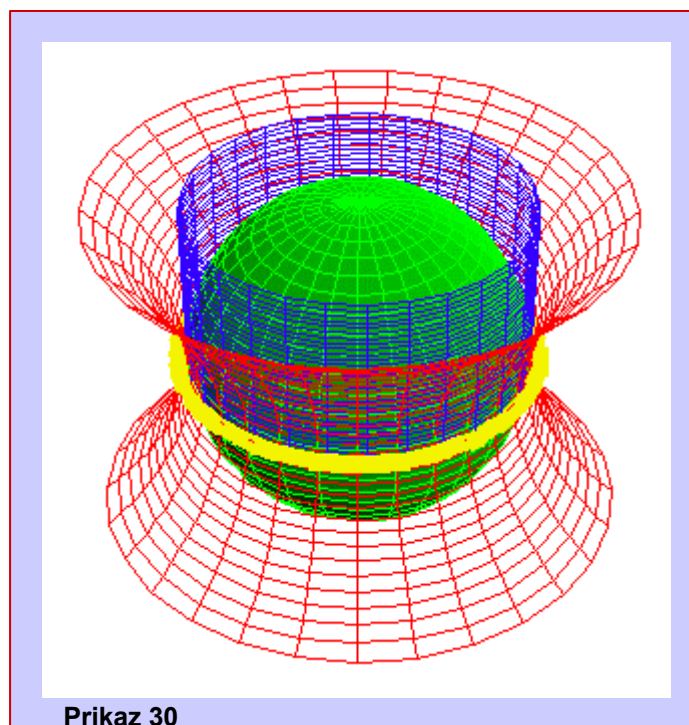
Međutim u slučaju eliptičkih transcendentalnih veličina postoje četiri točke koje se preslikaju na beskonačno i četiri točke koje se preslikaju na jedan. Unatoč tome jednostavni skup Möbiusovih preobrazbi nastavit će te projekcije preko beskonačnosti. (Vidi Prikaz 27 [Prikaz25-28](#)). To nam daje

preslik samoomeđenog prstena s većom gustoćom prekida nego što je moguće u kuglastom mnogoznačniku. (Vidi Prikaz 28a, b [Prikaz25-28](#)).

U hiper-eliptičkom slučaju preslik Riemannove površine je vrsta oktogona s "osam točaka u beskonačnosti" i osam točaka preslikanih na jedinicu. Kao i u slučaju eliptičke funkcije tih osam točaka u beskonačnosti određuju harmonička svojstva mnogoznačnika, no za razliku od eliptičkog slučaja osam točaka u beskonačnosti pridružene su negativnoj zakrivljenosti. Različita porodica Möbiusove preobrazbe nastavlja taj preslik preko beskonačnosti. Stoga hiper-eliptička funkcija može postojati samo u negativno zakrivljenom, ne-beskonačnom, samoomeđenom mnogoznačniku. (Vidi Prikaz 29 a, b [Prikaz29](#)).

Takav se mnogoznačnik ne može u potpunosti prikazati u vidljivom prostoru. Prema tome možemo samo "zapaziti" taj mnogoznačnik kao preslik na pečinski zid zapažanja osjetilima. No ipak, važno je podcrtati značenje promjene u svojstvu zakrivljenosti između eliptičkog i hiper-eliptičkog. Kuglasti mnogoznačnici imaju svojstvo pozitivne zakrivljenosti. Prsten spaja pozitivnu i negativnu zakrivljenost uz ukupni učinak od nula zakrivljenosti. Samoomeđeni mnogoznačnici u hiper-eliptičkom i višim područjima imaju svojstvo negativne zakrivljenosti.

S tog stajališta prekid koji se javlja kod Keplerove stožaste funkcije između eliptičke i hiperboličke domene pada pod novo svijetlo. On odgovara općenito promjeni svojstva između mnogoznačnika pozitivne zakrivljenosti jednostavnih i eliptičkih transcendentnih veličina i mnogoznačnika negativne zakrivljenosti hiper-eliptičkih (hiperboličnih) oblika. Riemann je raspoznao značenje te promjene i dao naslutiti da samo pojam prostora koji obuhvaća sve tri vrste zakrivljenosti može predstavljati univerzalne fizičke zakonitosti na zadovoljavajući način. U svojoj docentskoj dizertaciji predložio je zamisao takvog mnogoznačnika kao sjecište kugle, valjka i negativno zakrivljenog unutarnjeg dijela prstena. (Vidi prikaz 30). Jedna kružnica leži na sve tri površine i tvori sliku vidljivog prostora.



Prikaz 30

Još jednom, Euklidova ravnina sa nulom zakrivljenišću ne postoji osim u glavi Aristotelovaca i budala. Ona je samo ograničeni vid mnogoznačnika koji je ujedno i pozitivno i negativno zakrivljen. Takav mnogoznačnik, predstavljen prstenom Riemannove površine, ili metaforički, valjkom u konstrukciji u Prikazu 30, tek je prijelaz između prevladavajuće pozitivno zakrivljenog područja vidljivog prostora i prevladavajuće negativno zakrivljenog područja veoma velikog i veoma malog. Prema tome Svemiru se ne može dati odlika samo jedne vrste zakrivljenosti. Radije, mora se o njemu misliti kao dinamičkom procesu u kojem sve tri vrste zakrivljenosti uzajamno djeluju. Na taj način možemo oblikovati iz Riemannove obrade Abelovih i hipergeometrijskih funkcija predodžbu ne o jednom jedinstvenom ne-beskonačnom, samoomeđenom mnogoznačniku nego o ugnježđenom nizu takvih mnogoznačnika, vrsti koja je mnogoznačnik mnogoznačnikâ. Takav mnogoznačnik mnogoznačnika, koji u Riemannovom prikazu počinje jednostavnim samoomeđenom kuglom, koja prelazi u prsten i zatim u hiper-eliptičke i više funkcije, tvori predodžbu oblika ne-beskonačnog **samo-razvijajućeg**, samoomeđenog Svemira.

## Zaključni osvrt na Keplera, Riemanna i Einsteina

Einsteinova završna riječ u proslavi Keplerove godišnjice 1930. bila je:

Čini se da ljudski um mora prvo neovisno konstruirati oblike prije nego ih možemo pronaći u stvarima. Keplerovo čudesno dostignuće je posebno divan primjer istine da znanje ne može izbiti samo iz iskustva nego samo iz usporedbe inovacija uma sa zapaženim činjenicama.

Ove završne riječi odražavaju Einsteinovo odbacivanje pozitivizma i odjek su, iako nažalost u oslabljenom obliku, upliva Keplera i Riemanna na njegov način razmišljanja. No one isto ukazuju na njegov propust. Napredak u znanosti ovisi o pojačanoj povezanosti s Keplerom i Riemannom. Ljudski um ne radi tako da "prvo neovisno konstruira oblike prije

nego ih možemo pronaći u stvarima", jer nikad nije neovisan o Svemiru u kojem postoji. Uzajamno djelovanje uma sa zapaženom činjenicom nije uzajamno djelovanje dviju odvojenih domena. To je djelovanje koje **mijenja** samo-razvijajuće, višestruko spojene domene fizike, života i misli.

Keplerovo čudesno dostignuće divan je primjer **takve** vrste razmišljanja. Ono što nam je sad neophodno je više od jednostavnog divljenja Kepleru. Neophodna je vojska novih Keplera, koja će opskrbljena Riemannovim predodžbama i LaRoucheevim otkrićima učiniti što je Kepler uradio tijekom tog kratkog vremenskog razdoblja koje je završilo na ovaj dan pred 375 godina, a to je suprotstaviti se paradoksima koje nam Priroda predstavlja i pronaći u njima dublje razumijevanje Čovjeka.